

船舶海洋システム工学コース「計算工学演習第一」

MAXIMAによる数式処理(2)

MAXIMA（マキシマ）は数式を代数的に解くことが可能でグラフ描画も可能なフリー（無料）のソフトウェア

連立方程式・微分方程式・行列などを扱える

以下のサイトへアクセス：

<http://maxima.sourceforge.net/>

Top > Download(s) > Installation of Maxima in Windows >

使用しているWindowsに合わせて64bit版か32bit版をダウンロードしてインストール

行列の定義 : matrix()

```
(%i1) A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);  
      1 2 3  
(%o1) 4 5 6  
      7 8 9  
  
(%i2) B:matrix([a,b,c,d],[e,f,g,h]);  
(%o2) a b c d  
      e f g h
```

行列Aを定義

最後に[Shift]キーを押しながら[Enter]キーを押すと計算結果が表示される

行列Bを定義

行列の和・積・スカラー倍

```
(%i1) A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);  
      1 2 3  
(%o1) 4 5 6  
      7 8 9  
  
(%i2) B:matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);  
(%o2) a b c  
      d e f  
      g h i  
  
(%i3) A+B;  
(%o3) a+1 b+2 c+3  
      d+4 e+5 f+6  
      g+7 h+8 i+9  
  
(%i4) A.B;  
(%o4) 3 g+2 d+a 3 h+2 e+b 3 i+2 f+c  
      6 g+5 d+4 a 6 h+5 e+4 b 6 i+5 f+4 c  
      9 g+8 d+7 a 9 h+8 e+7 b 9 i+8 f+7 c
```

行列AとBの和

行列AとBの積

行列Bのスカラー積

```
(%i6) 3*B;  
(%o6) 3 a 3 b 3 c  
      3 d 3 e 3 f  
      3 g 3 h 3 i
```

行列のべき乗

行列A

```
(%i9) A;
(%o9)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 
```

行列Aの3乗

```
(%i7) A^3;
(%o7)  $\begin{bmatrix} 468 & 576 & 684 \\ 1062 & 1305 & 1548 \\ 1656 & 2034 & 2412 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i8) A.A.A;
(%o8)  $\begin{bmatrix} 468 & 576 & 684 \\ 1062 & 1305 & 1548 \\ 1656 & 2034 & 2412 \end{bmatrix}$ 
```

行列B

```
(%i10) B;
(%o10)  $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ 
```

行列Bの2乗

```
(%i12) B^2;
(%o12)  $\begin{bmatrix} cg+bd+a^2 & ch+be+ab & ci+bf+ac \\ fg+de+ad & fh+e^2+bd & fi+ef+cd \\ gi+dh+ag & hi+eh+bg & i^2+fh+cg \end{bmatrix}$ 
```

行列の転置 transpose()

行列B

```
(%i10) B;
(%o10)  $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ 
```

行列Bの転置

```
(%i13) transpose(B);
(%o13)  $\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$ 
```

行列の階数を求める: rank()

```
(%i9) A;
(%o9)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i14) rank(A);
(%o14) 2
```

逆行列を求める
invert():

```
(%i2) B:matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);
```

```
(%o2)
```

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

行列B

```
(%i15) invert(B);
```

```
(%o15)
```

$$\begin{bmatrix} \frac{ei-fh}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{ch-bi}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{bf-ce}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} \\ \frac{fg-di}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{ai-cg}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{cd-af}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} \\ \frac{dh-eg}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{bg-ah}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} & \frac{ae-bd}{a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)} \end{bmatrix}$$

行列Bの逆行列

行列式を求める
determinant():

```
(%i2) B:matrix([a,b,c],[d,e,f],[g,h,i]);
```

```
(%o2)
```

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

行列B

```
(%i16) determinant(B);
```

```
(%o16) a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)
```

行列Bの行列式

行列の固有値を求める
eigenvalues():

```
(%i1) A:matrix([5,-1],[6,-2]);  
(%o1)  $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$  行列A  
(%i2) eigenvalues(A);  
(%o2) [[4, -1], [1, 1]]
```

行列Aの固有値を求める

固有値1 固有値2 固有値1の重複度 固有値2の重複度

行列の固有値と
固有ベクトルを求める
eigenvectors():

```
(%i1) A:matrix([5,-1],[6,-2]);  
(%o1)  $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$   
(%i3) eigenvectors(A);  
(%o3) [[ [4, -1], [1, 1] ], [ [1, 1], [1, 6] ] ]
```

固有値1 固有値2 固有値1の重複度 固有値2の重複度

固有値1に対応する固有ベクトル 固有値2に対応する固有ベクトル

【演習問題】

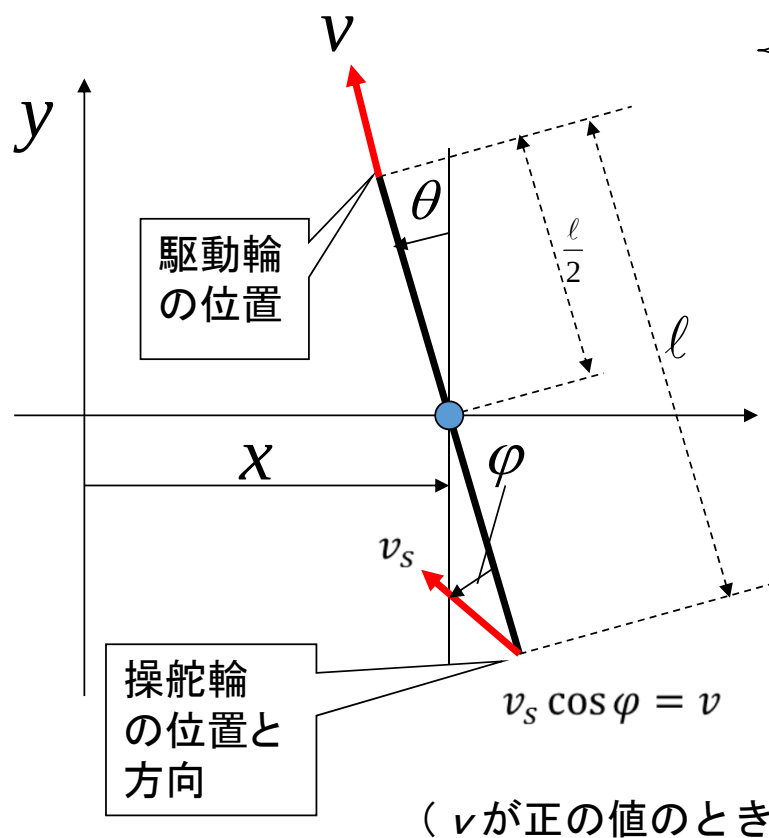
車両後進のためのハンドル制御の運動学 (kinematics)

車体中央部 ● の速度

$$\dot{x} = \frac{-v \sin \theta}{2} + \frac{-v_s \sin(\theta + \varphi)}{2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{-v_s \sin \varphi}{\ell}$$

$$\dot{y} = -v \cos \theta$$



ここで x と θ から操舵輪の角度 φ を決めるとする:

$$\varphi = k_1 x + k_2 \theta$$

位置フィードバック

角度フィードバック

このとき、車両が $x = 0, \theta = 0$ 付近で安定した直進バックをするためにはフィードバックゲイン k_1, k_2 をどのように設定すべきかを考える:

$x \approx 0, \theta \approx 0$ で動作範囲が微小とすると、

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1$$

$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1$ のように1次近似できる。すると

車体中央部 ● の速度は

$$\begin{cases} \dot{x} = -v\theta - \frac{v\varphi}{2} \\ \dot{\theta} = -\frac{v\varphi}{\ell} \end{cases}$$

操舵輪の角度の制御則
 $\varphi = k_1 x + k_2 \theta$
を代入して整理すると、
以下の微分方程式を得る：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{vk_1}{2} & -v\left(1 + \frac{k_2}{2}\right) \\ -\frac{vk_1}{\ell} & -\frac{vk_2}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

↑ 行列A

x, θ が初期状態に無関係に原点へ収束するための必要十分条件は
行列Aの**全ての固有値の実部が負**であること

【演習問題 1】 車両後進のハンドル制御について、maximaを用いてA行列の固有値を式で表せ。

【演習問題 2】 車両制御の問題において、
速度 $v > 0$ （後進）
ホイールベース $\ell = 4[m]$,
位置フィードバックゲイン $k_1 = -0.02$,
角度フィードバックゲイン $K_2 = 0$
の場合のA行列の固有値を計算し、系の収束や安定性について考察せよ。

【演習問題 3】 車両制御の問題において、
速度 $v > 0$ （後進）
ホイールベース $\ell = 4[m]$,
位置フィードバックゲイン $k_1 = -0.05$,
角度フィードバックゲイン $K_2 = 5.0$
の場合のA行列の固有値を計算し、系の収束や安定性について考察せよ。

【演習問題 4】 演習問題2および3の設定での $x(t)$ について微分方程式を解き、 $x = 1$, $\theta = 0$ を初期値とした $x(t)$ のグラフを重ねて表示せよ。

演習の提出について

作成したxmMaximaのファイルを、前回までの演習で作成した九大全学ファイル共有システム<http://www.m.kyushu-u.ac.jp/share/> の演習専用のフォルダへ追加でアップロードせよ。

前回提出した演習と区別できるよう「第5回演習(氏名).wxm」等の名前を付けておくこと。