九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

海事統計学　第3回　（担当：木村）

確率論の基礎1
（事象と標本空間・条件付き確率）

場所：　船2講義室

授業の資料等は

http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html

事象と確率　　コルモゴロフの公理

・**試行**:　その結果が偶然に支配されているような実験や観測
・**事象**:　試行の結果として起こりうる事柄
・各事象には、**確率**が付与される

【確率の公理1】 どのような事象 A に対しても、その確率 P(A)は 0 と 1 の間の値をとる。
すなわち　$0 \leqq P(A) \leqq 1$

【確率の公理2】 あらゆる可能な事象全体の集合をSとすれば、Sの確率は1である。
すなわち　$P(S) = 1$

【確率の公理3】 同時には起こりえない(これを互いに排反という)有限個あるいは無限個だが番号が付けられる事象をA1, A2, A3, …とするとき、A1, A2, A3, …のいずれかがおこる確率は,それぞれの事象が起こる確率の和に等しい
すなわち　$P(A1 \cup A2 \cup A3 \cup \ldots) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + \ldots$

例）　サイコロを1回振る
「1の目が出る」事象の確率　1／6
「2の目が出る」事象の確率　1／6
「4以上の目が出る」事象の確率　3／6＝1／2

・ある事象Aが起こらないこと、すなわちAではない事象のことをAの $\boxed{}$ $\overline{A}$ と呼ぶ

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

事象と確率　　コルモゴロフの公理

・**試行**：　その結果が偶然に支配されているような実験や観測
・**事象**：　試行の結果として起こりうる事柄
・各事象には、**確率**が付与される

【確率の公理1】 どのような事象 A に対しても、その確率 P(A)は 0 と 1 の間の値をとる。
すなわち　$0 \leqq P(A) \leqq 1$
【確率の公理2】 あらゆる可能な事象全体の集合をSとすれば、Sの確率は1である。
すなわち　$P(S)=1$
【確率の公理3】 同時には起こりえない（これを互いに排反という）有限個あるいは無限個だが番号が付けられる事象をA1, A2, A3, …とするとき、A1, A2, A3, …のいずれかがおこる確率は,それぞれの事象が起こる確率の和に等しい
すなわち　$P(A1 \cup A2 \cup A3 \cup \dots) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + \dots$

例）　サイコロを1回振る
「1の目が出る」事象の確率　1／6
「2の目が出る」事象の確率　1／6
「4以上の目が出る」事象の確率　3／6＝1／2

・ある事象Aが起こらないこと、すなわちAではない事象のことをAの **余事象** $\overline{A}$ と呼ぶ

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

アンドレイ・コルモゴロフ

（Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903 - 1987）

ロシアの数学者。モスクワで生まれ、確率論および位相幾何学の大きな発展に寄与した。 初期には直観主義論理学やフーリエ級数に関する研究を行い、また乱流や古典力学に関する研究成果もある。
彼はまたアルゴリズム情報理論の創始者でもある。
　彼の研究拠点はモスクワ大学であった。ニコライ・ルチンのもとで学び、1925年に学位を取得して、1931年に同大の教授に就任した。1939年にはソ連科学アカデミーの会員となった。

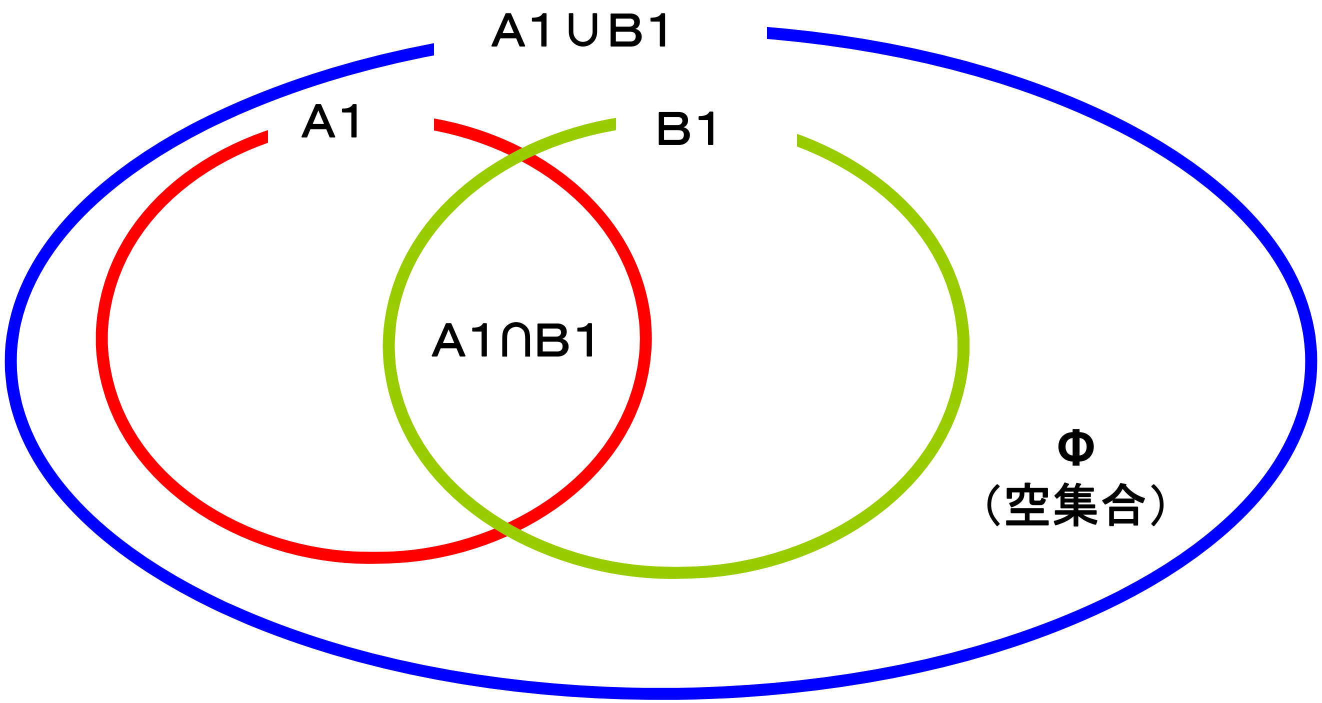
　彼は「数学の一分野としての確率論は、幾何学や代数学と全く同じように公理を起点として発達させることができるし、またそうであるべきだ」という格言を残している。

出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

加法定理

・事象 A1 の起きる確率　P(A1)
・事象 B1 の起きる確率　P(B1)
・事象 A1 および B1 のうち少なくともそのどちらか1つが起こる事象 A1∪B1
　　および事象　A1∪B1の起こる確率　P(A1∪B1)
・事象 A1 および B1 が同時に起こる事象 A1∩B1
　　および事象　A1∩B1　が起こる確率 P(A1∩B1)

このとき



例）　サイコロ
事象A　5の目
事象B　3以上の目

事象A∪B
＝{3, 4, 5, 6}

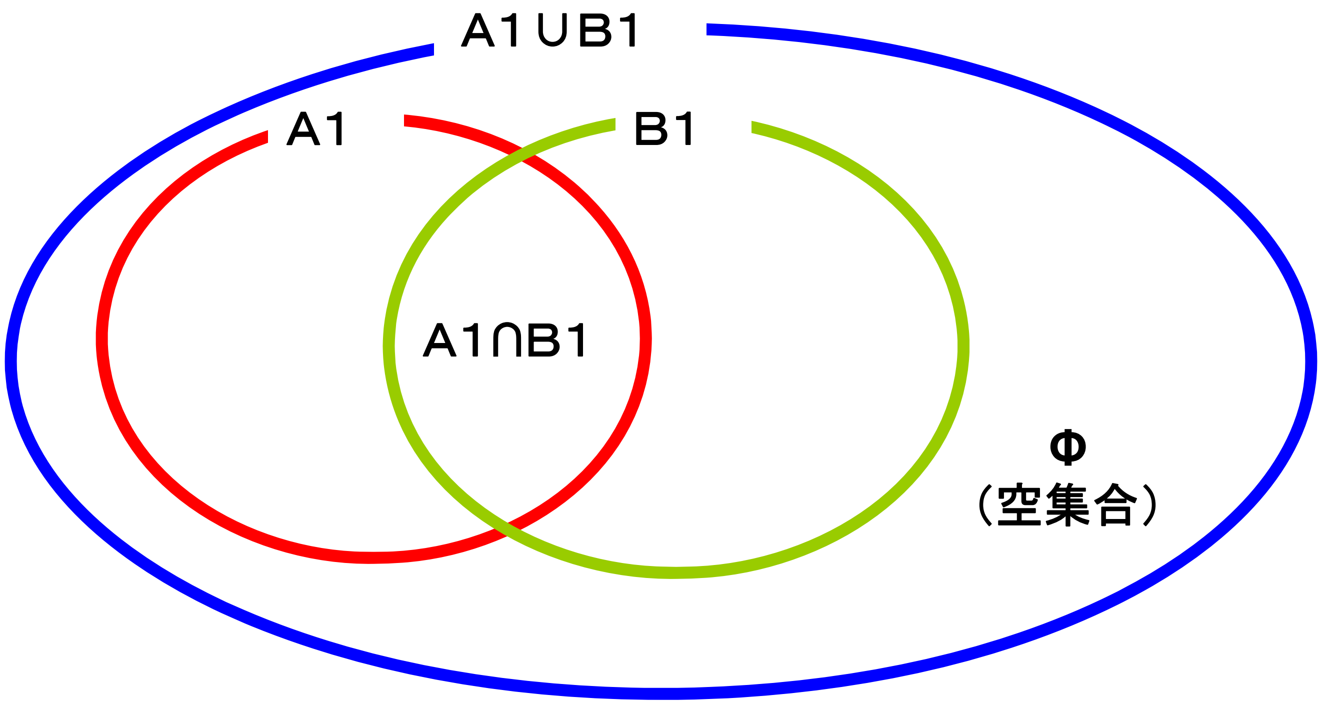
事象A∩B
＝{5}

加法定理

・事象 A1 の起きる確率　P(A1)
・事象 B1 の起きる確率　P(B1)
・事象 A1 および B1 のうち少なくともそのどちらか1つが起こる事象 A1∪B1
　　およびび事象　A1∪B1の起こる確率　P(A1∪B1)
・事象 A1 およびB1 が同時に起こる事象 A1∩B1
　　および事象　A1∩B1　が起こる確率 P(A1∩B1)

同時確率(joint probability)

このとき　$\boxed{P(A1 \cup B1) = P(A1) + P(B1) - P(A1 \cap B1)}$



例）　サイコロ
事象A　5の目
事象B　3以上の目

事象A∪B
＝{3, 4, 5, 6}

事象A∩B
＝{5}

【練習問題1】

３個のサイコロを同時に投げたとき、少なくともどれか１つは1の目が出る確率を求めよ。
（ヒント：　全てのサイコロが１以外の目になる事象をAとおき、余事象を考えよ）

【練習問題2】

カード100枚にそれぞれ１から100までの番号が書かれている。この中からランダムに１枚のカードを引くとき、そのカードの番号が2または3の倍数である確率を求めよ。
（ヒント：　加法定理を利用する）

【練習問題1】

３個のサイコロを同時に投げたとき、少なくともどれか１つは1の目が出る確率を求めよ。
（ヒント：　全てのサイコロが１以外の目になる事象をAとおき、余事象を考えよ）

事象Aの確率は、$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{125}{216}$

事象　A　と、その余事象 $\overline{A}$ との関係は $P(A)+P(\overline{A})=1$ であるから

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$

【練習問題2】

カード１００枚にそれぞれ１から１００までの番号が書かれている。この中からランダムに１枚のカードを引くとき、そのカードの番号が2または3の倍数である確率を求めよ。
（ヒント：　加法定理を利用する）

事象A:　　カードが2の倍数 $P(A)=\dfrac{50}{100}$

事象B:　　カードが3の倍数 $P(B)=\dfrac{33}{100}$

事象A∩B　カードが6の倍数 $P(A\cap B)=\dfrac{16}{100}$

よって

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{50}{100}+\frac{33}{100}-\frac{16}{100}$$

$$=\frac{67}{100}$$

条件付き確率（conditional probability）

事象 A1 と B1 が考えられるとき、事象 A1 が起こったという条件の下では
事象 B1 の確率はどうなるか

条件部

$$\underline{P(B_1 \mid A_1)} \quad = \quad \boxed{}$$

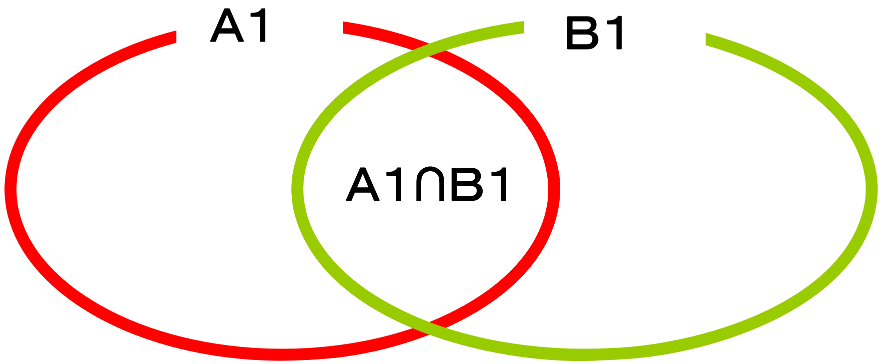
事象A1∩B1の
同時確率

事象A1が発生した条件下での
事象B1の確率：条件付確率

条件部A1が起こる全ての事象
の確率を合計した確率
（**周辺確率：marginal probability**）

事象A1が発生したら、新たな標本空間は
事象A1を占める領域に限定される

→　確率の値もその領域に合わせて比例配分



条件付き確率（conditional probability）

事象 A1 と B1 が考えられるとき、事象 A1 が起こったという条件の下では
事象 B1 の確率はどうなるか

条件部

$$P(B_1 \mid A_1) = \boxed{\frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)}}$$

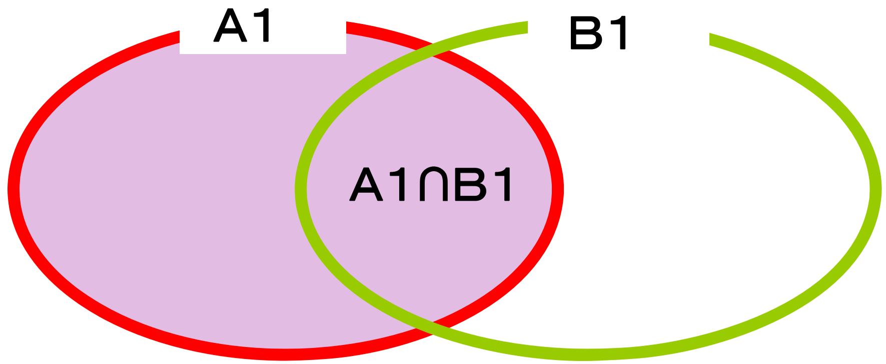
事象A1∩B1の
同時確率

事象A1が発生した条件下での
事象B1の確率：条件付確率

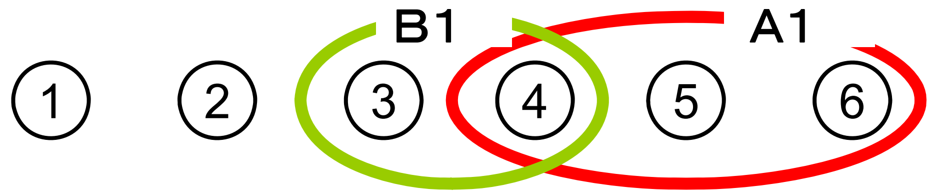
条件部A1が起こる全ての事象
の確率を合計した確率
（**周辺確率：marginal probability**）

事象A1が発生したら、新たな標本空間は
事象A1を占める領域に限定される

→ 確率の値もその領域に合わせて比例配分



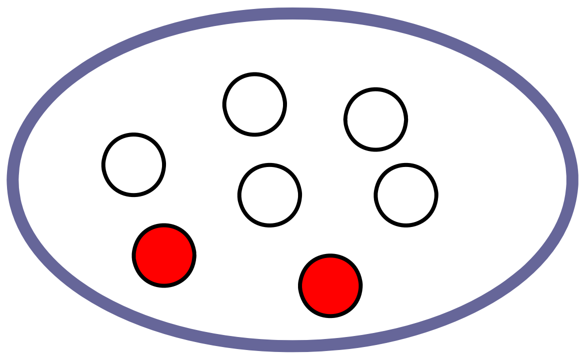
例1） サイコロ
事象A1　 ４以上の目
事象B1　 ３または4の目が出る



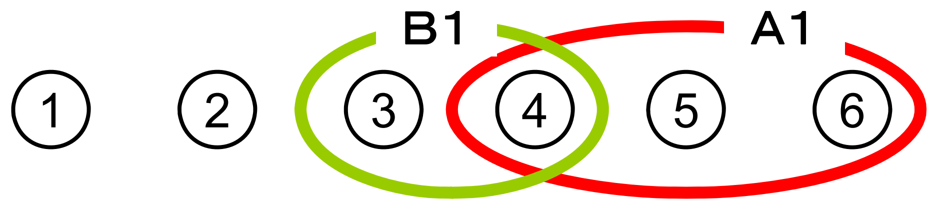
$$P(B_1 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} =$$

例2） 袋に赤球が2個、白球が5個入っている。
袋からランダムに1個取り出して何色かを調べた後、取り出した球をもとに戻さずにもう一度球をランダムに取り出す。

事象A1： １回目で赤を取り出す
事象B1： ２回目で赤を取り出す



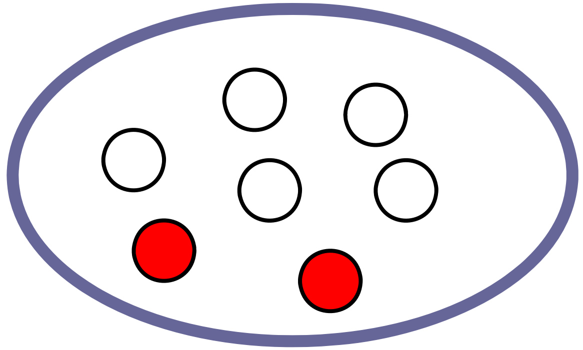
$$P(B_1 | A_1) =$$



例1） サイコロ
事象A1　 4以上の目
事象B1　 3または4の目が出る

$$P(B_1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

例2） 袋に赤球が2個、白球が5個入っている。
袋からランダムに1個取り出して何色かを調べた後、取り出した球をもとに戻さずにもう一度球をランダムに取り出す。



事象A1： 1回目で赤を取り出す
事象B1： 2回目で赤を取り出す

$$P(B_1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{2}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{6}$$

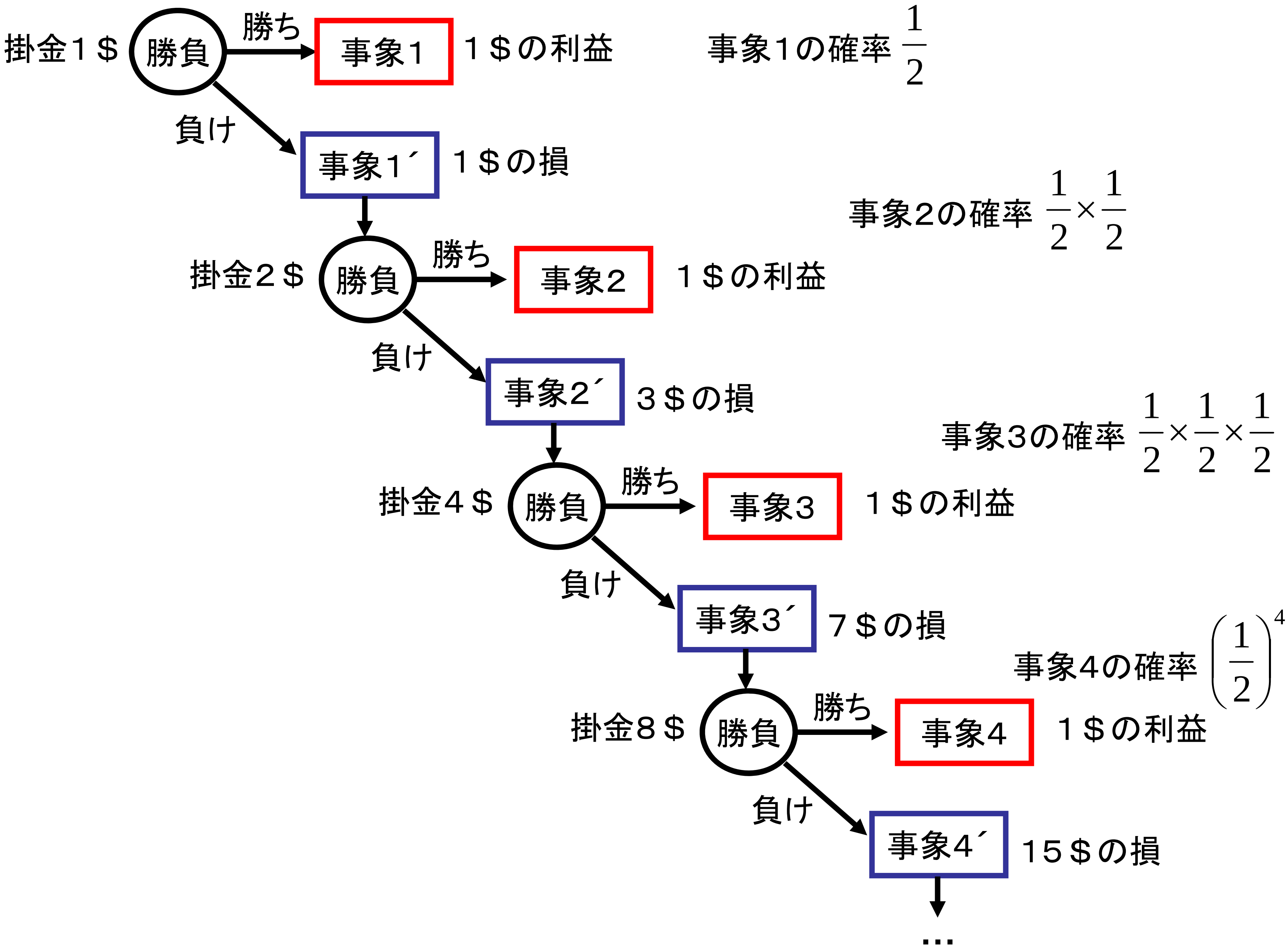
【練習問題】 倍掛け賭博（マルチンゲールの必勝法）

１回あたりの勝率が2分の１で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される賭博において、以下のような戦略でプレイする:

・最大で１０回まで勝負する。且つ
・１回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
・最初は１＄を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

このとき、
１） プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

２） 現在、５回ほど勝負に負けている状況にあるとする。
このとき、プレイの結果持ち金がプラスになる確率を求めよ。


掛金1＄
勝負
勝ち
事象1
1＄の利益
事象1の確率 $\frac{1}{2}$
負け
事象1´
1＄の損
事象2の確率 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
掛金2＄
勝負
勝ち
事象2
1＄の利益
負け
事象2´
3＄の損
事象3の確率 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
掛金4＄
勝負
勝ち
事象3
1＄の利益
負け
事象3´
7＄の損
事象4の確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^4$
掛金8＄
勝負
勝ち
事象4
1＄の利益
負け
事象4´
15＄の損
…

【練習問題】 倍掛け賭博（マルチンゲールの必勝法）

１回あたりの勝率が2分の１で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される
賭博において、以下のような戦略でプレイする:

・最大で１０回まで勝負する。且つ
・１回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
・最初は１＄を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

勝てば必ずプラス

負ける事象の確率
を考えて1から引く

このとき、
1） プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1023}{1024}=0.999$$

2） 現在、５回ほど勝負に負けている状況にあるとする。
このとき、プレイの結果持ち金がプラスになる確率を求めよ。

【練習問題】 倍掛け賭博（マルチンゲールの必勝法）

１回あたりの勝率が2分の１で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される賭博において、以下のような戦略でプレイする：

・最大で１０回まで勝負する。且つ
・１回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
・最初は１＄を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

勝てば必ずプラス

負ける事象の確率を考えて1から引く

このとき、
1） プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1023}{1024}=0.999$$

2） 現在、５回ほど勝負に負けている状況にあるとする。
このとき、プレイの結果持ち金がプラスになる確率を求めよ。

事象A１： ５回負ける
事象A２： 持ち金がプラス

$$P(A_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$P(A_1\cap A_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$$

事象５‘が起きたという**条件付確率**を考える

$$P(A_2\,|\,A_1)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{31}{32}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{31}{32}$$

条件付き確率と独立性

$$P(B_1 \mid A_1) \quad = \quad P(B_1)$$

または $$P(A_1 \mid B_1) \quad = \quad P(A_1)$$

であるとき、事象A1とB1は ＿＿＿＿ であるという

事象A1とB1が ＿＿ であるとき、A1∩B1の確率（同時確率）は

$$P(A_1 \cap B_1) \quad = \quad \boxed{}$$

例） コインAとBを同時に投げる
事象A1　コインAが表
事象B1　コインBが表

コインAもコインBも、裏表の出方は互いに無関係

条件付き確率と独立性

$$P(B_1 \mid A_1) \quad = \quad P(B_1)$$

または $$P(A_1 \mid B_1) \quad = \quad P(A_1)$$

であるとき、事象A1とB1は **独立（independent）** であるという

事象A1とB1が独立であるとき、A1∩B1の確率（同時確率）は

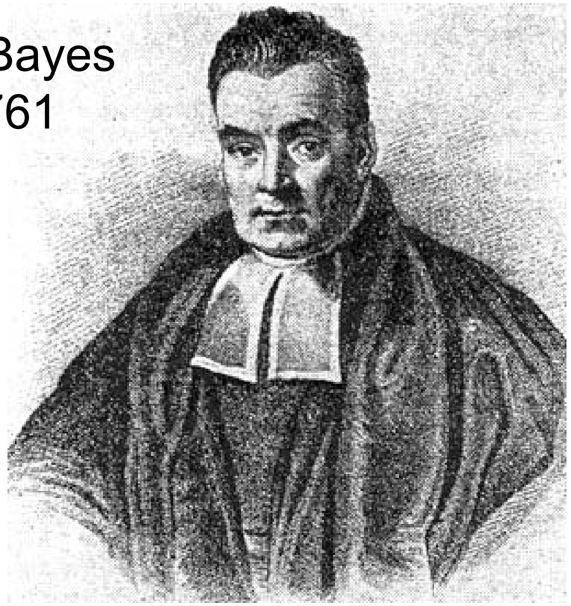
$$P(A_1 \cap B_1) \quad = \boxed{P(A_1)P(B_1)}$$

例） コインAとBを同時に投げる
事象A1　　コインAが表
事象B1　　コインBが表

→ コインAもコインBも、裏表の出方は互いに無関係

ベイズ（Bayes）の定理

Thomas Bayes
1702－1761



例） ある病院で腫瘍検査を受ける人について、
ガンである人の割合　1000人中5人
ガンの人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.95
ガンではない人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.055

ある患者が腫瘍マーカで検査したところ陽性だった
この患者がガンである確率は？

原因となる事象
A1：　患者がガン
A2：　患者が非ガン

結果となる事象
B1：　検査が陽性
B2：　検査が陰性

求める確率は

$$P(A_1 \mid B_1)$$

$$P(A_2 \mid B_1)$$

事象B1が起こった後の
条件付確率という意味で

ガン患者の割合より

$$P(A_1) =$$

$$P(A_2) =$$

事象Bが観測される前の
周辺確率という意味で

腫瘍マーカの性能より

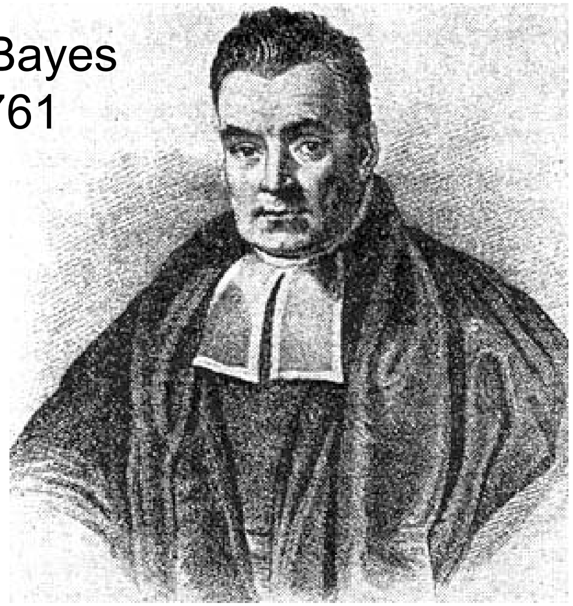
$$P(B_1 \mid A_1) =$$

$$P(B_1 \mid A_2) =$$

もっともらしさを表す
条件付確率：**尤度**（likelihood）

ベイズ（Bayes）の定理

Thomas Bayes
1702－1761



例）　ある病院で腫瘍検査を受ける人について、
ガンである人の割合　1000人中5人
ガンの人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.95
ガンではない人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.055

ある患者が腫瘍マーカで検査したところ陽性だった
この患者がガンである確率は？

原因となる事象
A1：　患者がガン
A2：　患者が非ガン

結果となる事象
B1：　検査が陽性
B2：　検査が陰性

求める確率は

$$P(A_1 | B_1)$$

$$P(A_2 | B_1)$$

事象B1が起こった後の
条件付確率という意味で

事後確率
（posterior probability）

ガン患者の割合より

$$P(A_1) = \boxed{0.005}$$

$$P(A_2) = \boxed{0.995}$$

事象Bが観測される前の
周辺確率という意味で

事前確率（prior probability）

腫瘍マーカの性能より

$$P(B_1 | A_1) = \boxed{0.95}$$

$$P(B_1 | A_2) = \boxed{0.055}$$

もっともらしさを表す
条件付確率：**尤度**（likelihood）

ベイズ(Bayes)の定理

例題に沿って説明すると

条件付確率の公式より

事後確率

$$P(A_1 \mid B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(A_1)P(B_1 \mid A_1)}{P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_1)}$$

マーカ陽性の条件下で
患者がガンである確率

事前確率

尤度

患者がガンで且つ
マーカで陽性になる確率

$$= \frac{P(A_1)P(B_1 \mid A_1)}{P(A_1)P(B_1 \mid A_1) + P(A_2)P(B_1 \mid A_2))} = \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.055}$$

事前確率

尤度

患者がガンで、且つ
マーカで陽性になる確率

患者が非ガンで、且つ
マーカが陽性になる確率

$$= 0.080$$

事後の確率が事前確率と尤度で表される

ベイズ(Bayes)の定理

もっと一般的に書くと

条件付確率の公式より

事後確率

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)}$$

事前確率

尤度

$$= \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}}$$

条件部の事象Bが起こる全ての
事象の確率を　合計した確率
(**周辺確率**)

尤度

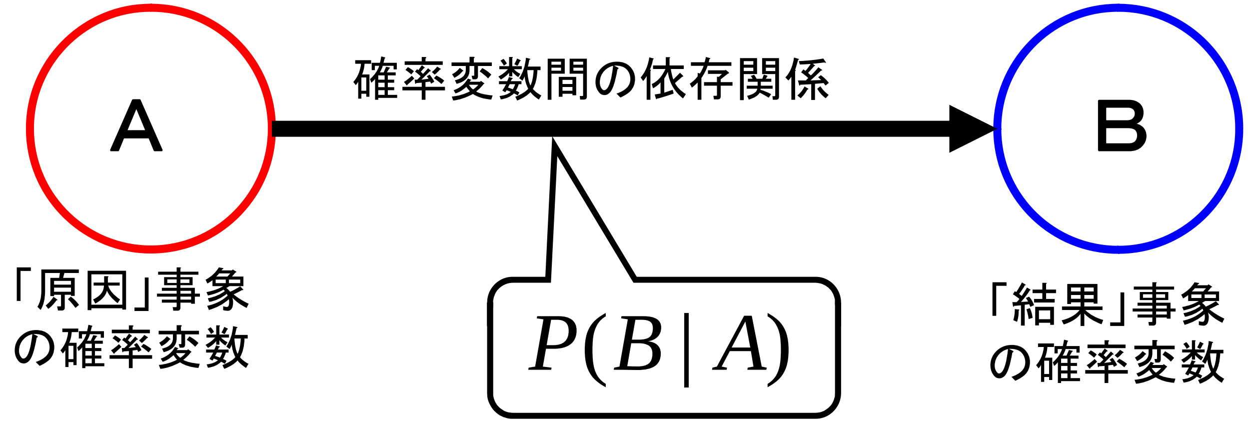
事前確率

事後の確率が**事前確率**と**尤度**で表される

サイコロの例題(4以上の目が出る事象A1、3以下の目が出る事象A2, 3または4の目が出る事象B1、3と4以外の目が出る事象B2)とした場合について計算すると分かりやすい

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

確率変数間の依存関係をグラフィカルに表現



知りたい事象が観測できなくても、関連する事象の観測結果より、
知りたい事象の状態（変数の値）をより正確に推定できる。

ベイズの定理より

事前確率　尤度

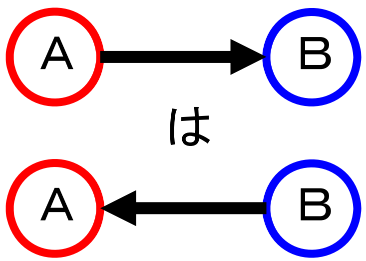
事後確率

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

事前確率　尤度

Aの事前分布が不明の場合、
一様分布（全て等確率）として与える

$$= \frac{P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)}$$



へ書き換え可能

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

ベイズの定理
での例題

直接観測できない

原因となる事象
A1： 患者がガン
A2： 患者が非ガン

結果となる事象
B1： 検査が陽性
B2： 検査が陰性

ガン患者の割合より

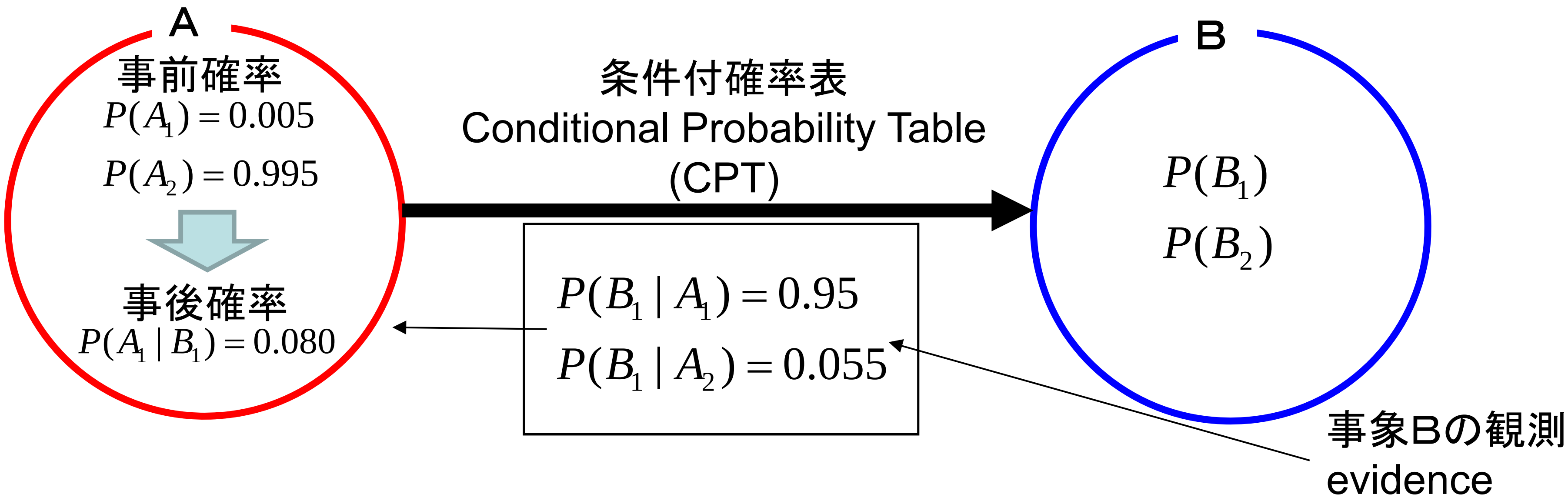
事前確率

$$P(A_1) = 0.005$$
$$P(A_2) = 0.995$$

腫瘍マーカの性能より

尤度

$$P(B_1 \mid A_1) = 0.95$$
$$P(B_1 \mid A_2) = 0.055$$



事象Bの観測結果よりCPTを通じてAの確率が更新された → belief の伝播

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

事象A1：喫煙者
事象A2：非喫煙

→

直接観測できない

事象B1：肺ガン
事象B2：肺気腫
事象B3：その他

→

事象C1：レントゲン陽性
事象C2：レントゲン陰性

事象A1のとき
$$P(B_1 \mid A_1) = 0.6$$
$$P(B_2 \mid A_1) = 0.3$$
$$P(B_3 \mid A_1) = 0.1$$

事象A2のとき
$$P(B_1 \mid A_2) = 0.3$$
$$P(B_2 \mid A_2) = 0.3$$
$$P(B_3 \mid A_2) = 0.4$$

事象B1のとき
$$P(C_1 \mid B_1) = 0.8$$
$$P(C_2 \mid B_1) = 0.2$$

事象B2のとき
$$P(C_1 \mid B_2) = 0.1$$
$$P(C_2 \mid B_2) = 0.9$$

事象B3のとき
$$P(C_1 \mid B_3) = 0.5$$
$$P(C_2 \mid B_3) = 0.5$$

順方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1) = 1$$
$$P(A_2) = 0$$

→ 事象Bの条件付確率 → 事象Cの条件付確率

$$P(C_1 \mid A_1)$$
$$P(C_2 \mid A_1)$$

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

直接観測できない

事象A1：喫煙者
事象A2：非喫煙

→

事象B1：肺ガン
事象B2：肺気腫
事象B3：その他

→

事象C1：レントゲン陽性
事象C2：レントゲン陰性

事象A1のとき
$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_1) = 0.6 \\ P(B_2 \mid A_1) = 0.3 \\ P(B_3 \mid A_1) = 0.1 \end{cases}$$

事象A2のとき
$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_2) = 0.3 \\ P(B_2 \mid A_2) = 0.3 \\ P(B_3 \mid A_2) = 0.4 \end{cases}$$

事象B1のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_1) = 0.8 \\ P(C_2 \mid B_1) = 0.2 \end{cases}$$

事象B2のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_2) = 0.1 \\ P(C_2 \mid B_2) = 0.9 \end{cases}$$

事象B3のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_3) = 0.5 \\ P(C_2 \mid B_3) = 0.5 \end{cases}$$

順方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1) = 1$$
$$P(A_2) = 0$$

→ 事象Bの条件付確率

$$\boxed{\begin{aligned} P(B_1 \mid A_1) &= 0.6 \\ P(B_2 \mid A_1) &= 0.3 \\ P(B_3 \mid A_1) &= 0.1 \end{aligned}}$$

→ 事象Cの条件付確率

$$P(C_1 \mid A_1)$$
$$P(C_2 \mid A_1)$$

Bの条件付確率

Cの条件付確率

$$
\begin{aligned}
P(C_1 \mid A_1) &= P(B_1 \mid A_1)P(C_1 \mid B_1) + P(B_2 \mid A_1)P(C_1 \mid B_2) + P(B_3 \mid A_1)P(C_1 \mid B_3) \\
&= 0.6 \times 0.8 + 0.3 \times 0.1 + 0.1 \times 0.5 \\
&= 0.56
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(C_2 \mid A_1) &= P(B_1 \mid A_1)P(C_2 \mid B_1) + P(B_2 \mid A_1)P(C_2 \mid B_2) + P(B_3 \mid A_1)P(C_2 \mid B_3) \\
&= 0.6 \times 0.2 + 0.3 \times 0.9 + 0.1 \times 0.5 \\
&= 0.44
\end{aligned}
$$

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

直接観測できない

事象A1：喫煙者
事象A2：非喫煙

→

事象B1：肺ガン
事象B2：肺気腫
事象B3：その他

→

事象C1：レントゲン陽性
事象C2：レントゲン陰性

事象A1のとき
$$P(B_1 | A_1) = 0.6$$
$$P(B_2 | A_1) = 0.3$$
$$P(B_3 | A_1) = 0.1$$

事象A2のとき
$$P(B_1 | A_2) = 0.3$$
$$P(B_2 | A_2) = 0.3$$
$$P(B_3 | A_2) = 0.4$$

事象B1のとき
$$P(C_1 | B_1) = 0.8$$
$$P(C_2 | B_1) = 0.2$$

事象B2のとき
$$P(C_1 | B_2) = 0.1$$
$$P(C_2 | B_2) = 0.9$$

事象B3のとき
$$P(C_1 | B_3) = 0.5$$
$$P(C_2 | B_3) = 0.5$$

逆方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事後確率 ← 事象Bの事後確率 ← 事象Cの周辺確率または観測

$$P(A_1 | C_1)$$
$$P(A_2 | C_1)$$

$$P(C_1) = 1$$
$$P(C_2) = 0$$

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

事象A1：喫煙者
事象A2：非喫煙

→

事象B1：肺ガン
事象B2：肺気腫
事象B3：その他

→

事象C1：レントゲン陽性
事象C2：レントゲン陰性

事象A1のとき
$$\begin{cases} P(B_1 | A_1) = 0.6 \\ P(B_2 | A_1) = 0.3 \\ P(B_3 | A_1) = 0.1 \end{cases}$$

事象A2のとき
$$\begin{cases} P(B_1 | A_2) = 0.3 \\ P(B_2 | A_2) = 0.3 \\ P(B_3 | A_2) = 0.4 \end{cases}$$

事象B1のとき
$$\begin{cases} P(C_1 | B_1) = 0.8 \\ P(C_2 | B_1) = 0.2 \end{cases}$$

事象B2のとき
$$\begin{cases} P(C_1 | B_2) = 0.1 \\ P(C_2 | B_2) = 0.9 \end{cases}$$

事象B3のとき
$$\begin{cases} P(C_1 | B_3) = 0.5 \\ P(C_2 | B_3) = 0.5 \end{cases}$$

逆方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事後確率 ← 事象Bの事後確率 ← 事象Cの周辺確率または観測

$$P(A_1 | C_1)$$
$$P(A_2 | C_1)$$

$$P(B_1 | C_1)$$
$$P(B_2 | C_1)$$
$$P(B_3 | C_1)$$

$$P(C_1) = 1$$
$$P(C_2) = 0$$

ベイズの定理より

事前確率が不明の場合
一様分布にしておく

$$P(B_1 | C_1) = \frac{P(B_1)P(C_1 | B_1)}{P(B_1)P(C_1 | B_1) + P(B_2)P(C_1 | B_2) + P(B_3)P(C_1 | B_3)}$$

$$= \frac{{}^1\!/_3 \times 0.8}{{}^1\!/_3 \times 0.8 + {}^1\!/_3 \times 0.1 + {}^1\!/_3 \times 0.5} = \frac{4}{7}$$

$$P(B_2 | C_1) = \frac{P(B_2)P(C_1 | B_2)}{P(B_1)P(C_1 | B_1) + P(B_2)P(C_1 | B_2) + P(B_3)P(C_1 | B_3)}$$

$$= \frac{{}^1\!/_3 \times 0.1}{{}^1\!/_3 \times 0.8 + {}^1\!/_3 \times 0.1 + {}^1\!/_3 \times 0.5} = \frac{1}{14}$$

$$P(B_3 | C_1) = \frac{P(B_3)P(C_1 | B_3)}{P(B_1)P(C_1 | B_1) + P(B_2)P(C_1 | B_2) + P(B_3)P(C_1 | B_3)}$$

$$= \frac{{}^1\!/_3 \times 0.5}{{}^1\!/_3 \times 0.8 + {}^1\!/_3 \times 0.1 + {}^1\!/_3 \times 0.5} = \frac{5}{14}$$

ベイズの定理より

$$P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.6}{\frac{1}{2}\times 0.6+\frac{1}{2}\times 0.3}=\frac{2}{3}$$

$$P(A_1|B_2)=\frac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(A_1)P(B_2|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.3}{\frac{1}{2}\times 0.3+\frac{1}{2}\times 0.3}=\frac{1}{2}$$

$$P(A_1|B_3)=\frac{P(A_1)P(B_3|A_1)}{P(A_1)P(B_3|A_1)+P(A_2)P(B_3|A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.1}{\frac{1}{2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 0.4}=\frac{1}{5}$$

よって

$$P(A_1|C_1)=P(A_1|B_1)P(B_1|C_1)+P(A_1|B_2)P(B_2|C_1)+P(A_1|B_3)P(B_3|C_1)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{14}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{14}=\frac{41}{84}$$

もし事象C2が観測された場合　　ベイズの定理より

$$P(B_1 | C_2) = \frac{P(B_1)P(C_2 | B_1)}{P(B_1)P(C_2 | B_1) + P(B_2)P(C_2 | B_2) + P(B_3)P(C_2 | B_3)}$$

$$= \frac{{}^1\!/_3 \times 0.2}{{}^1\!/_3 \times 0.2 + {}^1\!/_3 \times 0.9 + {}^1\!/_3 \times 0.5} = \frac{1}{8}$$

$$P(B_2 | C_2) = \frac{P(B_2)P(C_2 | B_2)}{P(B_1)P(C_2 | B_1) + P(B_2)P(C_2 | B_2) + P(B_3)P(C_2 | B_3)}$$

$$= \frac{{}^1\!/_3 \times 0.9}{{}^1\!/_3 \times 0.2 + {}^1\!/_3 \times 0.9 + {}^1\!/_3 \times 0.5} = \frac{9}{16}$$

$$P(B_3 | C_2) = \frac{P(B_3)P(C_2 | B_3)}{P(B_1)P(C_2 | B_1) + P(B_2)P(C_2 | B_2) + P(B_3)P(C_2 | B_3)}$$

$$= \frac{{}^1\!/_3 \times 0.5}{{}^1\!/_3 \times 0.2 + {}^1\!/_3 \times 0.9 + {}^1\!/_3 \times 0.5} = \frac{5}{16}$$

もし事象C2が観測された場合

事前確率が不明の場合
一様分布にしておく

ベイズの定理より

$$P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)}=\frac{1/2\times0.6}{1/2\times0.6+1/2\times0.3}=\frac{2}{3}$$

$$P(A_1|B_2)=\frac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(A_1)P(B_2|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)}=\frac{1/2\times0.3}{1/2\times0.3+1/2\times0.3}=\frac{1}{2}$$

$$P(A_1|B_3)=\frac{P(A_1)P(B_3|A_1)}{P(A_1)P(B_3|A_1)+P(A_2)P(B_3|A_2)}=\frac{1/2\times0.1}{1/2\times0.1+1/2\times0.4}=\frac{1}{5}$$

よって

$$P(A_1|C_2)=P(A_1|B_1)P(B_1|C_2)+P(A_1|B_2)P(B_2|C_2)+P(A_1|B_3)P(B_3|C_2)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{16}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{16}=\frac{17}{24}$$

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

事象A1：喫煙者
事象A2：非喫煙

→

直接観測できない

事象B1：肺ガン
事象B2：肺気腫
事象B3：その他

→

事象C1：レントゲン陽性
事象C2：レントゲン陰性

事象A1のとき $\begin{cases} P(B_1 \mid A_1) = 0.6 \\ P(B_2 \mid A_1) = 0.3 \\ P(B_3 \mid A_1) = 0.1 \end{cases}$

事象A2のとき $\begin{cases} P(B_1 \mid A_2) = 0.3 \\ P(B_2 \mid A_2) = 0.3 \\ P(B_3 \mid A_2) = 0.4 \end{cases}$

事象B1のとき $\begin{cases} P(C_1 \mid B_1) = 0.8 \\ P(C_2 \mid B_1) = 0.2 \end{cases}$

事象B2のとき $\begin{cases} P(C_1 \mid B_2) = 0.1 \\ P(C_2 \mid B_2) = 0.9 \end{cases}$

事象B3のとき $\begin{cases} P(C_1 \mid B_3) = 0.5 \\ P(C_2 \mid B_3) = 0.5 \end{cases}$

両方向から belief が伝播

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$P(A_1) = 1$

$P(A_2) = 0$

→

事象Bの確率
（信念：belief）

$P(B_1 \mid A_i, C_i)$

$P(B_2 \mid A_i, C_i)$

$P(B_3 \mid A_i, C_i)$

= 条件付確率
×事後分布を計算して正規化

←

evidence

事象Cの周辺確率
または観測

$P(C_1) = 1$

$P(C_2) = 0$

順方向に計算

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$P(A_1)=1$

$P(A_2)=0$

$$\left\{\begin{aligned} P(B_1\mid A_1)&=\boxed{}\\ P(B_2\mid A_1)&=\boxed{}\\ P(B_3\mid A_1)&=\boxed{}\end{aligned}\right.$$

evidence

事象Bの事後確率

事象Cの周辺確率
または観測

$P(C_1)=1$

$P(C_2)=0$

逆方向に計算

$$P(B_1\mid A_1,C_1)=\frac{P(B_1\mid A_1)P(B_1\mid C_1)}{P(B_1\mid A_1)P(B_1\mid C_1)+P(B_2\mid A_1)P(B_2\mid C_1)+P(B_3\mid A_1)P(B_3\mid C_1)}=\frac{0.6\times 4/7}{0.6\times 4/7+0.3\times 1/14+0.1\times 5/14}=\frac{6}{7}$$

$$P(B_2\mid A_1,C_1)=\frac{P(B_2\mid A_1)P(B_2\mid C_1)}{P(B_1\mid A_1)P(B_1\mid C_1)+P(B_2\mid A_1)P(B_2\mid C_1)+P(B_3\mid A_1)P(B_3\mid C_1)}=\frac{0.3\times 1/14}{0.6\times 4/7+0.3\times 1/14+0.1\times 5/14}=\frac{3}{56}$$

$$P(B_3\mid A_1,C_1)=\frac{P(B_3\mid A_1)P(B_3\mid C_1)}{P(B_1\mid A_1)P(B_1\mid C_1)+P(B_2\mid A_1)P(B_2\mid C_1)+P(B_3\mid A_1)P(B_3\mid C_1)}=\frac{0.1\times 5/14}{0.6\times 4/7+0.3\times 1/14+0.1\times 5/14}=\frac{5}{56}$$

順方向に計算

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1)=1$$
$$P(A_2)=0$$

$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_1)=\boxed{0.6} \\ P(B_2 \mid A_1)=\boxed{0.3} \\ P(B_3 \mid A_1)=\boxed{0.1} \end{cases}$$

evidence

事象Bの事後確率

事象Cの周辺確率
または観測

$$P(C_1)=1$$
$$P(C_2)=0$$

逆方向に計算

$$P(B_1 \mid A_1, C_1)=\frac{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)+P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)+P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}=\frac{0.6\times 4/7}{0.6\times 4/7+0.3\times 1/14+0.1\times 5/14}=\frac{6}{7}$$

$$P(B_2 \mid A_1, C_1)=\frac{P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)+P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)+P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}=\frac{0.3\times 1/14}{0.6\times 4/7+0.3\times 1/14+0.1\times 5/14}=\frac{3}{56}$$

$$P(B_3 \mid A_1, C_1)=\frac{P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)+P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)+P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}=\frac{0.1\times 5/14}{0.6\times 4/7+0.3\times 1/14+0.1\times 5/14}=\frac{5}{56}$$

順方向に計算

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$P(A_1)=1$

$P(A_2)=0$

$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_1)= \boxed{0.6} \\ P(B_2 \mid A_1)= \boxed{0.3} \\ P(B_3 \mid A_1)= \boxed{0.1} \end{cases}$$

事象Bの事後確率

$$P(B_1 \mid C_1)=\frac{4}{7}$$

$$P(B_2 \mid C_1)=\frac{1}{14}$$

$$P(B_3 \mid C_1)=\frac{5}{14}$$

逆方向に計算

evidence

事象Cの周辺確率
または観測

$P(C_1)=1$

$P(C_2)=0$

$$P(B_1 \mid A_1,C_1)=\frac{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)+P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)+P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}=\frac{0.6\times {}^4\!/\!_7}{0.6\times {}^4\!/\!_7+0.3\times {}^1\!/\!_{14}+0.1\times {}^5\!/\!_{14}}=\frac{6}{7}$$

$$P(B_2 \mid A_1,C_1)=\frac{P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)+P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)+P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}=\frac{0.3\times {}^1\!/\!_{14}}{0.6\times {}^4\!/\!_7+0.3\times {}^1\!/\!_{14}+0.1\times {}^5\!/\!_{14}}=\frac{3}{56}$$

$$P(B_3 \mid A_1,C_1)=\frac{P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)+P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)+P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}=\frac{0.1\times {}^5\!/\!_{14}}{0.6\times {}^4\!/\!_7+0.3\times {}^1\!/\!_{14}+0.1\times {}^5\!/\!_{14}}=\frac{5}{56}$$

【演習問題】　2017.04.18　学籍番号　　　　氏名

ある飲酒運転の検挙用の簡易アルコールセンサーで検査を行うと、
・飲酒を行っている人についてアルコールを検出する確率は０．８
（飲酒を行っているのにアルコールを検出できない確率が０．２）
・飲酒していないにもかかわらずアルコールを検出してしまう確率が０．３
（飲酒していない人についてアルコールを検出しない確率が０．７）
であるものとする。
このとき、

ヒント：事前確率が未知
$P(A_1) = P(A_2) = 0.5$

原因となる事象
A１：　飲酒している
A２：　飲酒していない

$P(B_1 | A_1) = 0.8$
$P(B_2 | A_1) = 0.2$
$P(B_1 | A_2) = 0.3$
$P(B_2 | A_2) = 0.7$

結果となる事象
B１：　アルコール反応あり
B２：　アルコール反応なし

１）　事前分布が未知の被験者において、上記センサによりアルコール反応が出た。
この被験者が飲酒をしている確率、および飲酒をしていない確率をそれぞれ求めよ。

２）　車種や検挙暦などから、飲酒運転をしているとは考えにくい被験者については、
飲酒の事前確率が０．２であるとする。この被験者から上記センサのアルコール
反応があったとき、飲酒している確率を求めよ。

【演習問題】　　　　　　　　　　学籍番号　　　　　　　氏名

ある飲酒運転の検挙用の簡易アルコールセンサーで検査を行うと、
・飲酒を行っている人についてアルコールを検出する確率は０．８
（飲酒を行っているのにアルコールを検出できない確率が０．２）
・飲酒していないにもかかわらずアルコールを検出してしまう確率が０．３
（飲酒していない人についてアルコールを検出しない確率が０．７）
であるものとする。
このとき、

原因となる事象
A1：　飲酒している
A2：　飲酒していない

$P(B_1 | A_1) = 0.8$
$P(B_2 | A_1) = 0.2$
$P(B_1 | A_2) = 0.3$
$P(B_2 | A_2) = 0.7$

結果となる事象
B1：　アルコール反応あり
B2：　アルコール反応なし

1）　事前分布が未知の被験者において、上記センサによりアルコール反応が出た。
この被験者が飲酒をしている確率、および飲酒をしていない確率をそれぞれ求めよ。

事前確率＝0.5

$$\underbrace{P(A_1 | B_1)}_{\text{事後確率}} = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_1 | A_i)} = \frac{0.5 \cdot 0.8}{0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.3} = \frac{8}{11}$$

$$P(A_2 | B_1) = \frac{P(A_2)P(B_1 | A_2)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_1 | A_i)} = \frac{3}{11}$$

2）　車種や検挙暦などから、飲酒運転をしているとは考えにくい被験者については、
飲酒の事前確率が０．２であるとする。この被験者から上記センサのアルコール
反応があったとき、飲酒している確率を求めよ。

事前確率＝0.2

$$\underbrace{P(A_1 | B_1)}_{\text{事後確率}} = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_1 | A_i)} = \frac{0.2 \cdot 0.8}{0.2 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.3} = \frac{2}{5}$$

事前確率＝0.2, 0.8