九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

海事統計学　第4回　（担当：木村）

確率論の基礎2：
離散分布の期待値と分散

授業の資料等は

http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html

確率変数と確率分布

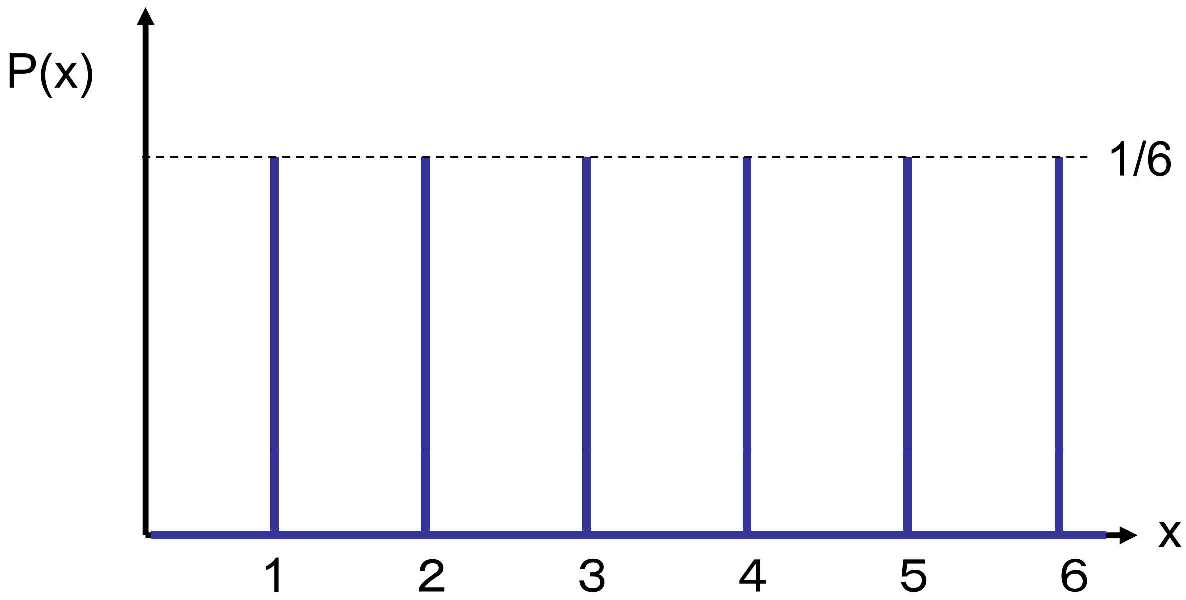
- **標本空間(sample space)**:実験や観察のあらゆる可能な結果を表す点の集合
- **標本点(sample point)**:標本空間中の各点で、それぞれ1つの可能な結果や事象
- 各標本点には、**確率**が付与される
- **確率変数(random variable)**:標本空間の標本点に対応して値が決まる変数

  (例) サイコロを振ったとき出る目の値
- **確率分布関数(probability distribution function)**:

  確率変数 x の関数としての確率 P(x)

  (例) さいころの目 x の確率分布関数 P(x) → **x: 離散確率変数**

  P(1) = 1/6, P(2) = 1/6 … , P(0) = 0, P(1/3) = 0



(離散)一様分布

期待値（expected value）

確率分布関数や確率密度関数から計算される**確率変数 x の（理論的な）平均値**

離散分布の場合

$$E\{x\}= \boxed{}$$

確率分布関数の重心

【期待値の性質】

c を定数、 $u(x)$ を確率変数 x の関数とするとき、

$$E\{c\,u(x)\}=c\,E\{u(x)\}$$

確率変数の定数倍の期待値は、
その期待値の定数倍

期待値（expected value）

確率分布関数や確率密度関数から計算される**確率変数 x の（理論的な）平均値**

離散分布の場合

$$\boxed{E\{x\} = \sum_{x \in X} x\, P(x)}$$

確率分布関数の重心

【期待値の性質】

c を定数、 $u(x)$ を確率変数 x の関数とするとき、

$$E\{c\, u(x)\} = c\, E\{u(x)\}$$

確率変数の定数倍の期待値は、その期待値の定数倍

分散（variance）

σは標準偏差
と呼ばれる

確率変数 x についての期待値からの偏差の2乗の期待値

$$Var\{x\} = \sigma^2$$

離散分布の場合 $Var\{x\} = E\left\{(x - E\{x\})^2\right\} = \boxed{}$

【分散の性質】

$$Var\{x\} = E\left\{(x - E\{x\})^2\right\} = \boxed{}$$

「確率変数xの期待値」の２乗

「確率変数xの２乗」の期待値

分散（variance）

σは標準偏差
と呼ばれる

確率変数 x についての期待値からの偏差の2乗の期待値

$$Var\{x\} = \sigma^2$$

離散分布の場合

$$Var\{x\} = E\left\{\left(x - E\{x\}\right)^2\right\} = \boxed{\sum_{x \in X} \left(x - E\{x\}\right)^2 P(x)}$$

【分散の性質】

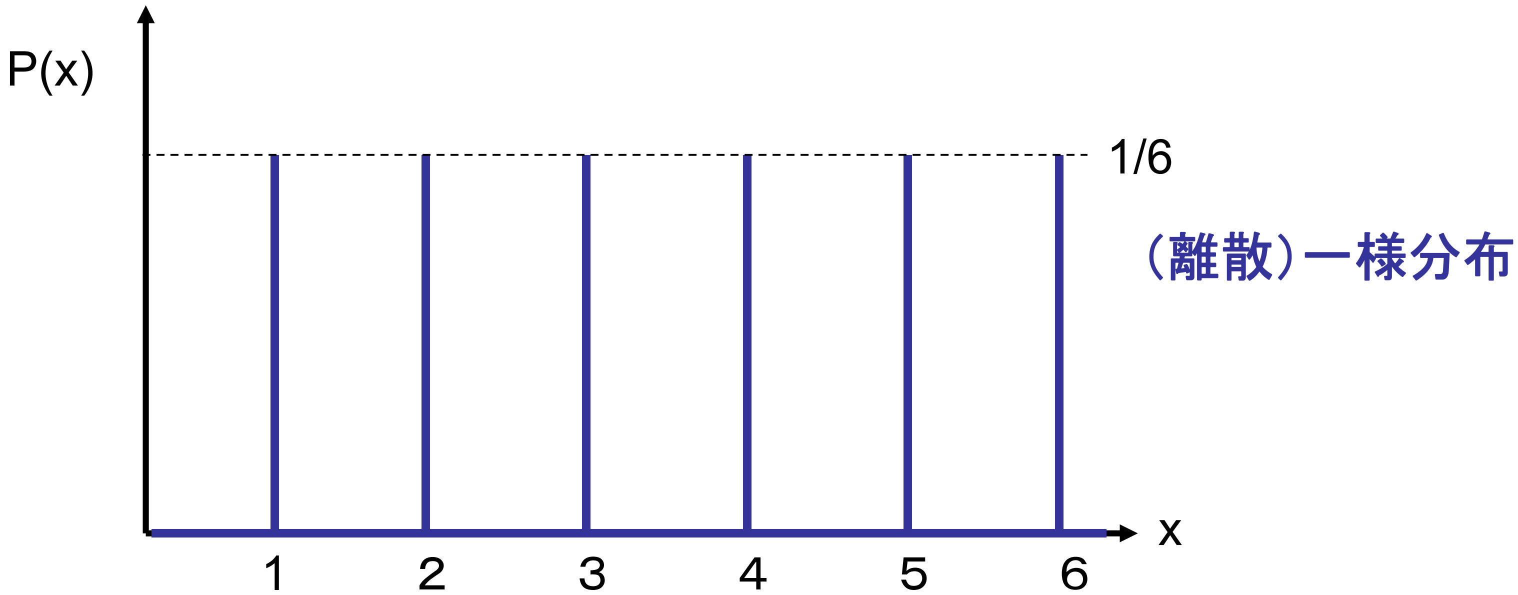
$$Var\{x\} = E\left\{\left(x - E\{x\}\right)^2\right\} = \boxed{\underbrace{E\{x^2\}}_{\text{「確率変数xの2乗」の期待値}} - \underbrace{\left(E\{x\}\right)^2}_{\text{「確率変数xの期待値」の2乗}}}$$

「確率変数xの期待値」の2乗

「確率変数xの2乗」の期待値

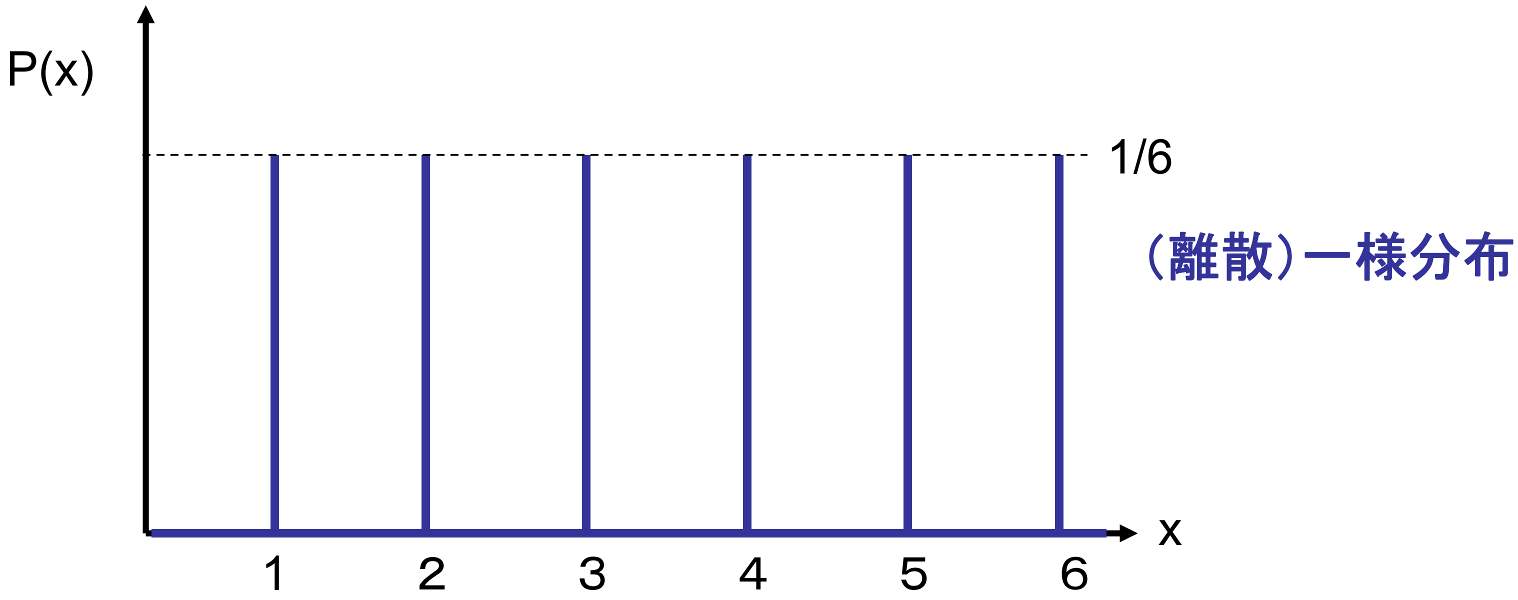
練習問題

【1】 サイコロを投げたときの目の期待値と分散を計算せよ。



練習問題

【1】 サイコロを投げたときの目の期待値と分散を計算せよ。



$$E\{x\} = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + \cdots + 6\times\frac{1}{6}$$
$$= \frac{7}{2}$$

$$Var\{x\} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$= \frac{35}{12}$$

倍掛け賭博（マルチンゲールの必勝法）

１回あたりの勝率が2分の１で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される
賭博において、以下のような戦略でプレイする：

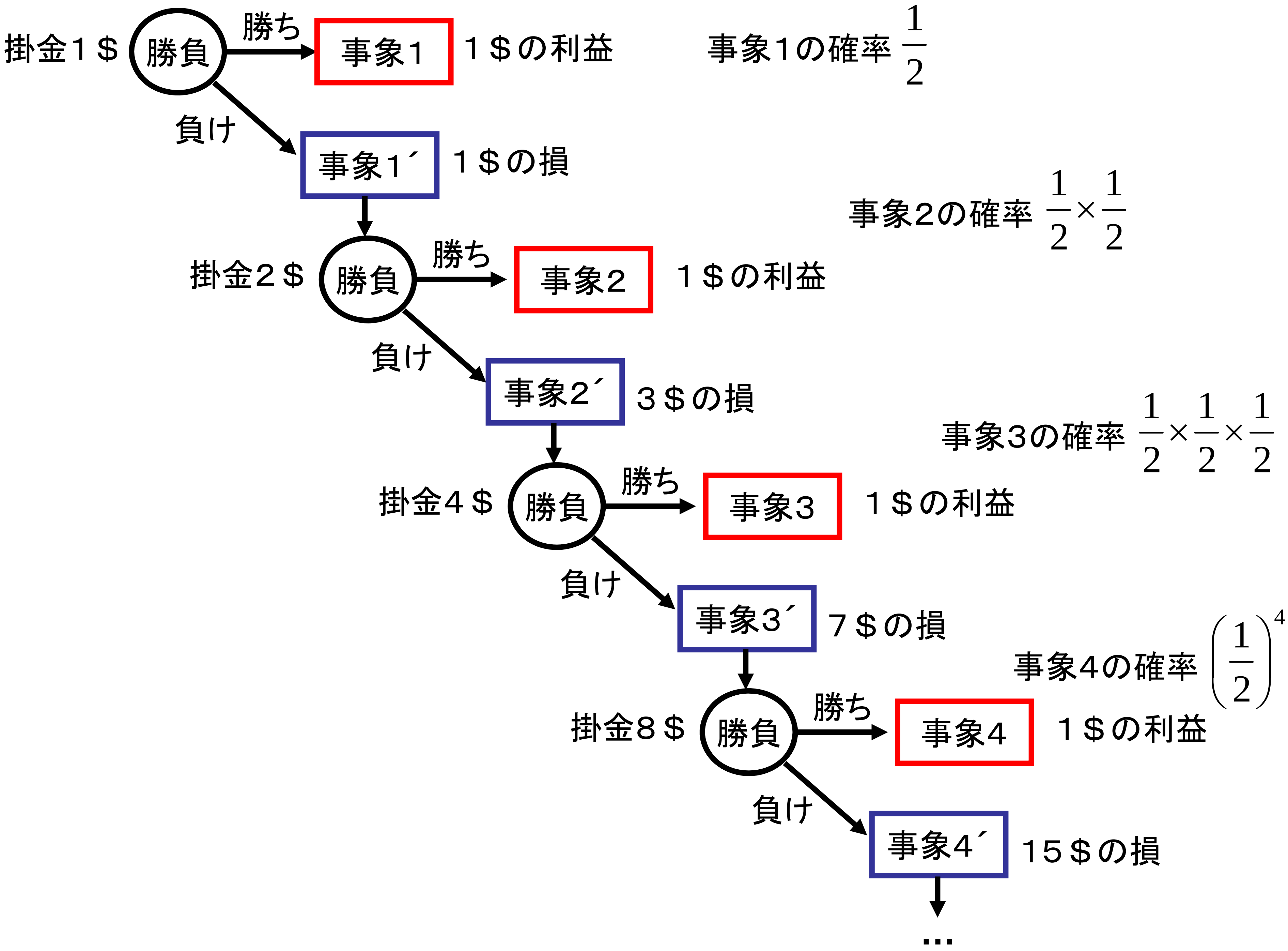
・最大で１０回まで勝負する。且つ
・１回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
・最初は１＄を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

勝てば必ずプラス

負ける事象の確率
を考えて1から引く

このとき、
1） プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

2） プレイ結果の利益の期待値を求めよ。



掛金1＄
勝負
勝ち
事象1
1＄の利益
事象1の確率 $\frac{1}{2}$
負け
事象1´
1＄の損
事象2の確率 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
掛金2＄
勝負
勝ち
事象2
1＄の利益
負け
事象2´
3＄の損
事象3の確率 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
掛金4＄
勝負
勝ち
事象3
1＄の利益
負け
事象3´
7＄の損
事象4の確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^4$
掛金8＄
勝負
勝ち
事象4
1＄の利益
負け
事象4´
15＄の損
…

倍掛け賭博（マルチンゲールの必勝法）

１回あたりの勝率が２分の１で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される賭博において、以下のような戦略でプレイする：

- 最大で１０回まで勝負する。且つ
- １回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
- 最初は１＄を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

このとき、

１）　プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

勝てば必ずプラス

負ける事象の確率を考えて1から引く

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1023}{1024}=0.999$$

２）　プレイ結果の利益の期待値を求めよ。

$$E\{x\}=\overbrace{\left(1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2^2}+\cdots+1\times\frac{1}{2^{10}}\right)}^{\text{「勝つ」場合の確率と利益}}+\overbrace{\left((-1023)\times\frac{1}{2^{10}}\right)}^{\text{「負ける」場合の確率と利益}}$$

$$=1\times\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)-1023\times\frac{1}{2^{10}}$$

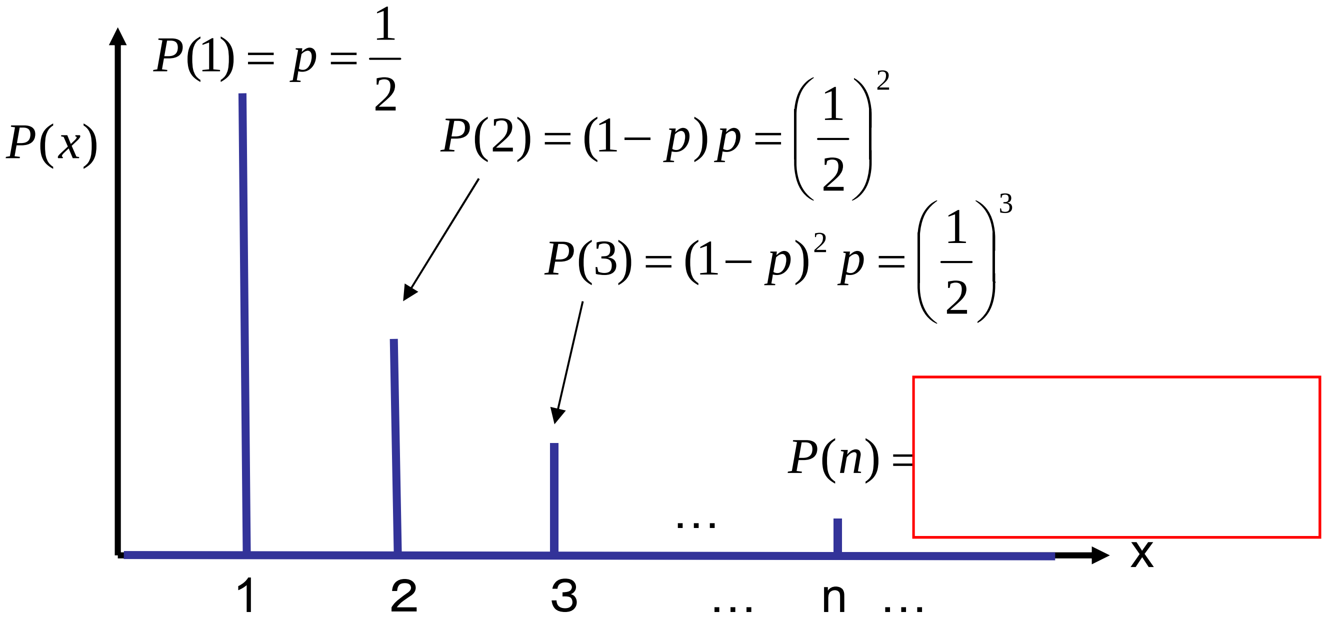
$$=\frac{1023}{1024}-\frac{1023}{1024}$$

$$=0$$

確率変数のとりうる値が離散かつ無限個の場合（1）

成功する確率が p の事象が初めて成功するまでの試行回数 x

（例） 1枚のコインを投げ、はじめて表が出るまでに投げる回数 x



全ての確率を合計してみる

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(x) \quad = \qquad\qquad = \quad 1$$

等比級数の和

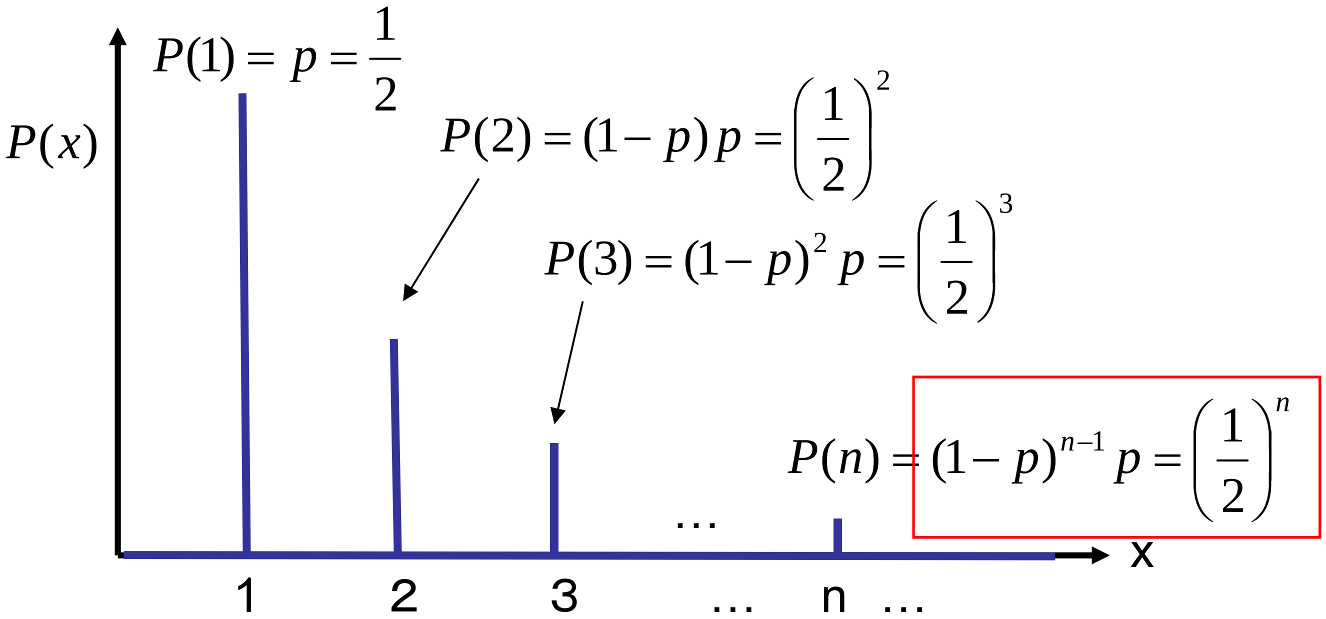
幾何分布
（geometric distribution）

電球が切れるまでの時間

1台の機械が故障するまでの時間など

確率変数のとりうる値が離散かつ無限個の場合（1）

成功する確率が p の事象が初めて成功するまでの試行回数 x
（例） 1枚のコインを投げ、はじめて表が出るまでに投げる回数 x



全ての確率を合計してみる

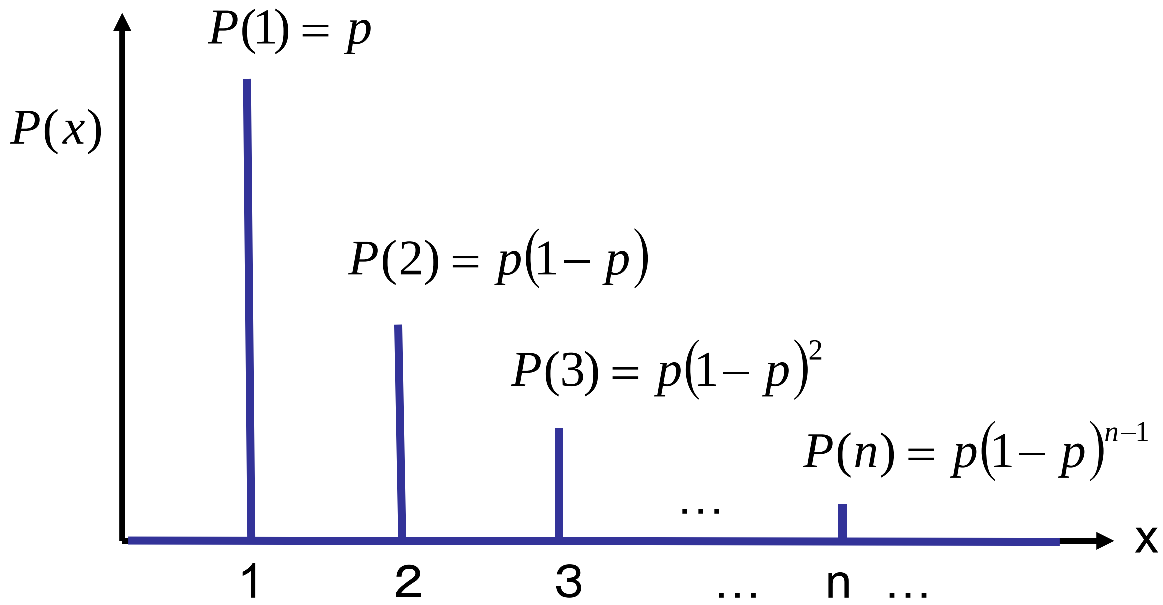
$$\sum_{x=1}^{\infty} P(x) \quad = \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} p \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}} \quad = \quad 1$$

等比級数の和

幾何分布
（geometric distribution）

電球が切れるまでの時間
1台の機械が故障するまでの
時間など

幾何分布の期待値と分散



期待値

$$E\{x\}=\sum_{x=1}^{\infty}xP(x)=1p+2p(1-p)+3p(1-p)^2+\cdots=S$$ とおく

$$S(1-p)=1p(1-p)+2p(1-p)^2+3p(1-p)^3+\cdots$$

$$S-S(1-p)=p+p(1-p)+p(1-p)^2+\cdots$$

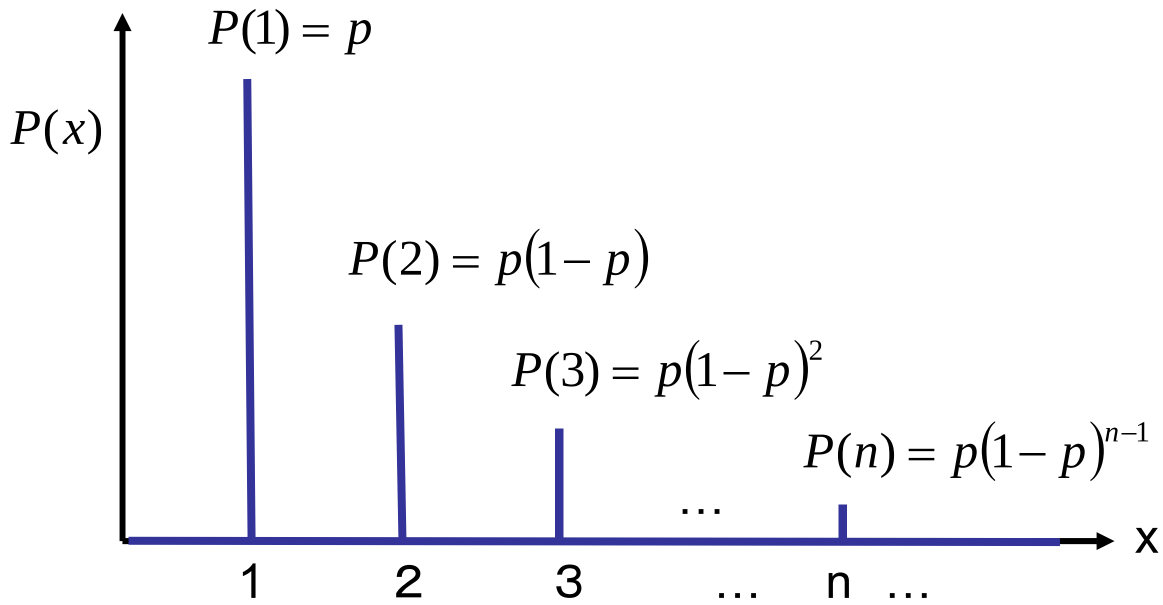
$$S=1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\cdots=\boxed{}$$

等比数列の和

同様にして分散は

$$Var\{x\}=\left(\sum_{x=1}^{\infty}x^2P(x)\right)-(E\{x\})^2=\boxed{}$$

幾何分布の期待値と分散



期待値

$$E\{x\}=\sum_{x=1}^{\infty} xP(x)=1p+2p(1-p)+3p(1-p)^2+\cdots=S$$ とおく

$$S(1-p)=1p(1-p)+2p(1-p)^2+3p(1-p)^3+\cdots$$

$$S-S(1-p)=p+p(1-p)+p(1-p)^2+\cdots$$

$$S=1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\cdots=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n=\lim_{n\to\infty}1\times\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}=\frac{1}{p}}$$

等比数列の和

単位時間あたり故障率 p の機械が故障なく動き続ける平均時間

同様にして分散は

$$Var\{x\}=\left(\sum_{x=1}^{\infty}x^2P(x)\right)-\left(E\{x\}\right)^2=\boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

２変数の確率分布　$f(x,y)$ 同時確率（Joint probability）

＝　複数の事象がどちらも起こる確率

例１）　２個のサイコロを振る　x＝サイコロAの目、y＝サイコロBの目
例２）　ある学生の試験成績　x＝数学の得点、　y＝英語の得点

xの $\boxed{}$

他の事象にかかわりなく
１つの事象だけの確率

同時確率を不要な事象に
関して合計して得られる

xの期待値

$$E\{x\} = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} x \, f(x,y) = \sum_{x \in X} x \boxed{\sum_{y \in Y} f(x,y)} = \sum_{x \in X} x \boxed{f(x)}$$

xの分散

$$Var\{x\} = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} (x - E\{x\})^2 f(x,y) = \sum_{x \in X} (x - E\{x\})^2 \boxed{\sum_{y \in Y} f(x,y)}$$

$$= \sum_{x \in X} (x - E\{x\})^2 \boxed{f(x)}$$

xの $\boxed{}$

yについても同様

２変数の確率分布　$f(x,y)$ 同時確率（Joint probability）

＝　複数の事象がどちらも起こる確率

例１）　２個のサイコロを振る　x＝サイコロAの目、y＝サイコロBの目
例２）　ある学生の試験成績　x＝数学の得点、 y＝英語の得点

xの 周辺確率

他の事象にかかわりなく
１つの事象だけの確率

同時確率を不要な事象に
関して合計して得られる

xの期待値

$$E\{x\} = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} x\, f(x,y) = \sum_{x \in X} x \boxed{\sum_{y \in Y} f(x,y)} = \sum_{x \in X} x \boxed{f(x)}$$

xの分散

$$Var\{x\} = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} (x - E\{x\})^2 f(x,y) = \sum_{x \in X} (x - E\{x\})^2 \boxed{\sum_{y \in Y} f(x,y)}$$

$$= \sum_{x \in X} (x - E\{x\})^2 \boxed{f(x)}$$

xの 周辺確率

yについても同様

２変数の確率分布

確率変数 x, y の和 x+y についての期待値は

$$E\{x+y\}=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}(x+y)f(x,y)$$

$$=\left(\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}x\ f(x,y)\right)+\left(\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}y\ f(x,y)\right)$$

$$=\left(\sum_{x\in X}x\ f(x)\right)+\left(\sum_{y\in Y}y\ f(y)\right)\quad=\boxed{\phantom{E\{x\}+E\{y\}}}$$

確率変数の足し算の
期待値は、それぞれの
期待値の足し算に等しい

x, y が**互いに**
独立かどうかに
関係なく成立する

【共分散】　ｘ と ｙ について、

$$Cov(x,y)=\boxed{\phantom{E\{(x-\mu_x)(y-\mu_y)\}}}$$

x と y の共分散
（covariance）

$$\rho=\frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}}$$

x と y の相関係数
（correlation）　-1<ρ<1

２変数の確率分布

確率変数 x, y の和 x+y についての期待値は

$$E\{x+y\}=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}(x+y)f(x,y)$$

$$=\left(\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}x\ f(x,y)\right)+\left(\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y}y\ f(x,y)\right)$$

$$=\left(\sum_{x\in X}x\ f(x)\right)+\left(\sum_{y\in Y}y\ f(y)\right)\quad=\boxed{E\{x\}+E\{y\}}$$

確率変数の足し算の
期待値は、それぞれの
期待値の足し算に等しい

x, y が互いに
独立かどうかに
関係なく成立する

【共分散】　x と y について、

$$Cov(x,y)=\boxed{\begin{aligned}&E\{(x-E\{x\})(y-E\{y\})\}\\=&E\{xy\}-E\{x\}E\{y\}\end{aligned}}$$

→ x と y の共分散
（covariance）

$$\rho=\frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}}$$

→ x と y の相関係数
（correlation）　-1<ρ<1

２変数の確率分布

【確率変数x, y が独立の場合】

$$E\{xy\} = \boxed{}$$

独立な確率変数の積の期待値は、
それぞれの期待値の積に等しい

$$Cov(x, y) = \boxed{}$$

独立な確率変数の共分散はゼロ

$$Var\{x + y\} = Var\{x\} + Var\{y\} - 2Cov(x, y) = \boxed{}$$

独立な確率変数の和の分散は、
それぞれの分散の和に等しい

２変数の確率分布

【確率変数x, y が独立の場合】

$$E\{xy\} = \boxed{E\{x\}E\{y\}}$$

独立な確率変数の積の期待値は、
それぞれの期待値の積に等しい

$$Cov(x, y) = \boxed{E\{xy\} - E\{x\}E\{y\} = 0}$$

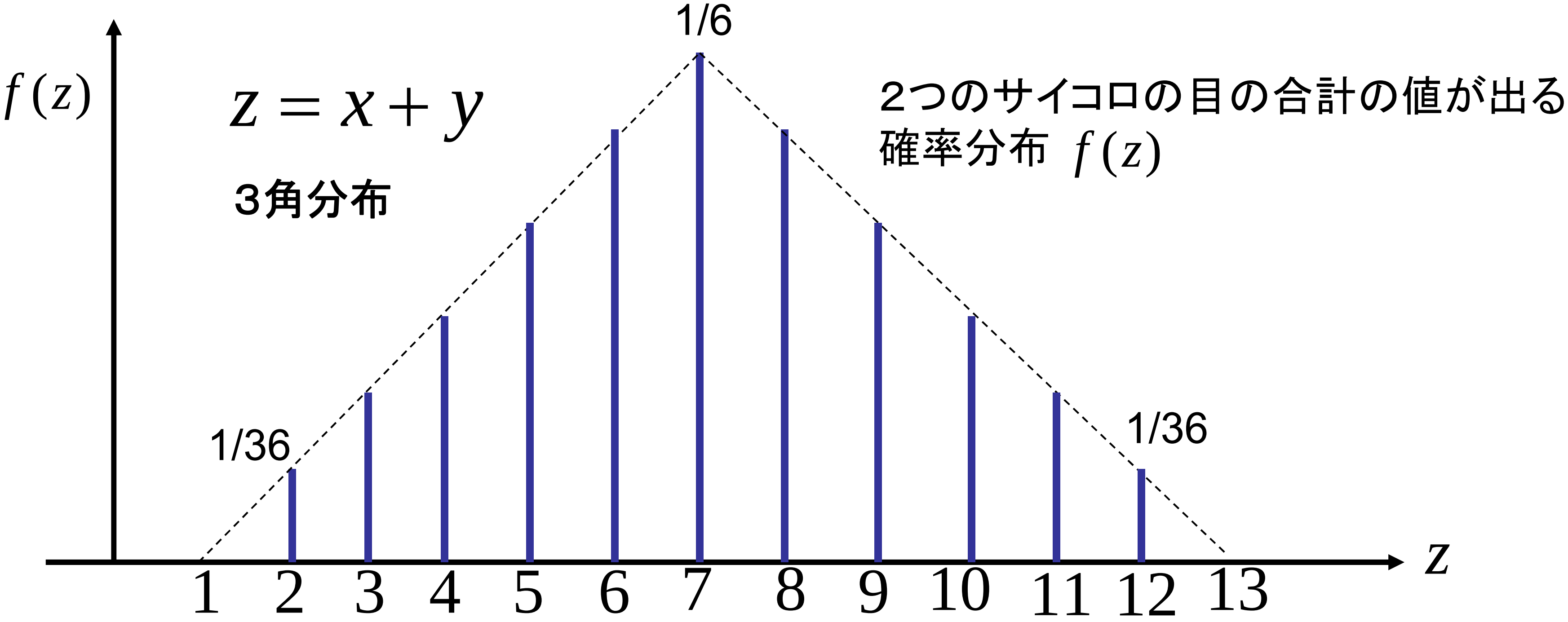
独立な確率変数の共分散はゼロ

$$Var\{x + y\} = Var\{x\} + Var\{y\} - 2Cov(x, y) = \boxed{Var\{x\} + Var\{y\}}$$

独立な確率変数の和の分散は、
それぞれの分散の和に等しい

練習問題

【1】 2個のサイコロを投げたときの目の合計の期待値を計算せよ。



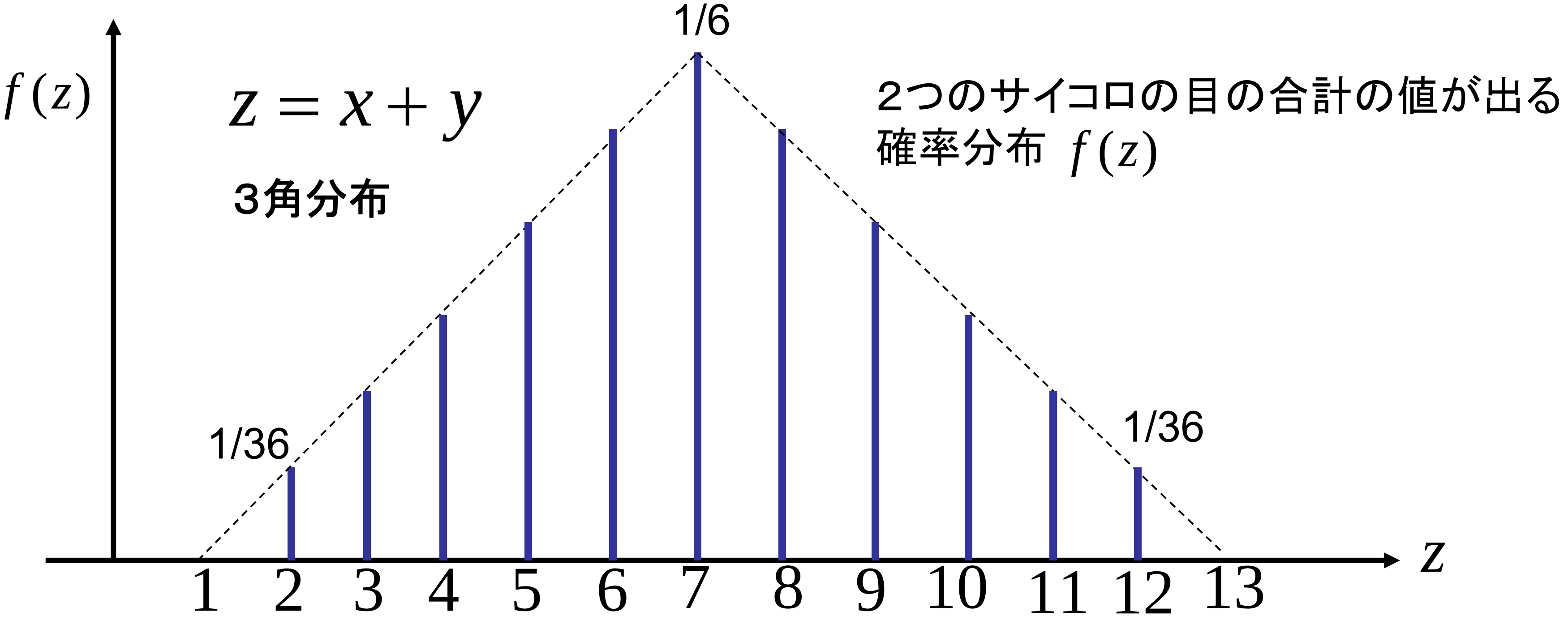
サイコロAの出る目　x　の期待値

サイコロBの出る目　y　の期待値

z = x + y の期待値

練習問題

【1】 2個のサイコロを投げたときの目の合計の期待値を計算せよ。



サイコロAの出る目 x の期待値 $E\{x\}=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

サイコロBの出る目 y の期待値 $E\{y\}=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

z = x + y の期待値 $E\{z\}=E\{x+y\}=E\{x\}+E\{y\}=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$

二項分布

1回の試行で、ある事象の起こる確率が p
この試行を n 回行う

確率変数 x : **事象の起こった回数**
確率分布 P(x) → **二項分布** B(n,p)

（例） 3回サイコロを投げたときの1の目が出る回数 $= x$

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$	$3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$	$3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

一般に、確率 p を持つ事象が n 回の試行中 x 回おこることを考えると、

$$\underbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \cdots\ \bigcirc}_{x\text{ 回}}\quad \underbrace{\times\ \times\ \cdots\ \times}_{n-x\text{ 回}}$$

このときの確率は

n 回の試行中に x 回起こるパターンの組合せ（combination）は、

$${}_nC_x = \frac{n!}{x!\left(n-x\right)!}$$

よって

$$P(x) = {}_nC_x\ p^x (1-p)^{n-x} =$$

二項分布

1回の試行で、ある事象の起こる確率が p
この試行を n 回行う

確率変数 x : **事象の起こった回数**
確率分布 P(x) → **二項分布** B(n,p)

（例） 3回サイコロを投げたときの1の目が出る回数 = x

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$	$3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$	$3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{15}{216}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$

一般に、確率 p を持つ事象が n 回の試行中 x 回おこることを考えると、

$$\underbrace{\bigcirc\ \bigcirc\ \cdots\ \bigcirc}_{x\text{ 回}}\quad \underbrace{\times\ \times\ \cdots\ \times}_{n-x\text{ 回}}$$

このときの確率は $\boxed{p^x(1-p)^{n-x}}$

n 回の試行中に x 回起こるパターンの組合せ（combination）は、

$${}_nC_x=\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

よって

$$P(x)={}_nC_x\ p^x(1-p)^{n-x}=\boxed{\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}}$$

練習問題：2項分布の期待値と分散

【1】 1回の試行で、ある事象の起こる確率が p のとき、
事象が起こった場合 x=1、起こらなかった場合 x=0 とする
（ベルヌーイ分布と呼ばれる）。このときこの分布の期待値と分散を計算せよ。

ベルヌーイ分布の確率変数 $x = \{0, 1\}$

$x = 1$ の場合 $P(x) = \boxed{}$

$x = 0$ の場合 $P(x) = \boxed{}$

よって期待値は

分散は

【2】 確率 p を持つ事象が n 回の試行中に起きる回数 x の分布（二項分布）
の期待値と分散を求めよ。
（ヒント）ベルヌーイ分布に従う独立な試行をn回実行したことと等価。

よって二項分布の期待値　　　　分散

練習問題：2項分布の期待値と分散

【1】 1回の試行で、ある事象の起こる確率が p のとき、
事象が起こった場合 x=1、起こらなかった場合 x=0 とする
（ベルヌーイ分布と呼ばれる）。このときこの分布の期待値と分散を計算せよ。

ベルヌーイ分布の確率変数 $x = \{0, 1\}$

$x = 1$ の場合 $P(x) = \boxed{p}$

$x = 0$ の場合 $P(x) = \boxed{1 - p}$

よって期待値は $E\{x\} = \sum_{x=1,0} xP(x) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) \quad = p$

分散は $Var\{x\} = \sum_{x,1,0} (x - E\{x\})^2 P(x) = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 (1 - p) = p(1 - p)$

【2】 確率 p を持つ事象が n 回の試行中に起きる回数 x の分布（二項分布）
の期待値と分散を求めよ。
（ヒント）ベルヌーイ分布に従う独立な試行をn回実行したことと等価。

二項分布は、独立なベルヌーイ分布をn コ足し合わせた場合と等価

よって**二項分布の期待値 np, 分散 np(1-p)**

確率変数のとりうる値が離散かつ無限個の場合（2）

ポアソン分布（Poisson distribution）

発生時間間隔は指数分布（次回）

単位時間あたり平均で λ 回発生する事象が、

単位時間に x 回（ゼロを含む）発生する確率

$$P(x) = \boxed{}$$

二項分布において、

確率 p を持つ事象が n 回の試行中 x 回おこることを考えた

N回試行における発生回数の期待値

$\lambda = n\,p$ とおく

$$P(x) = {}_nC_x\; p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x\,!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x\,!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x = 1,$$

よって

$$P(x) = \lim_{n\to\infty} {}_nC_x\; p^x (1-p)^{n-x} = \boxed{}$$

ポアソン分布は
二項分布の極限

確率変数のとりうる値が離散かつ無限個の場合（2）

ポアソン分布（Poisson distribution）

発生時間間隔は
指数分布（次回）

単位時間あたり平均で λ 回発生する事象が、
単位時間に x 回（ゼロを含む）発生する確率

$$P(x) = \boxed{\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}$$

二項分布において、
確率 p を持つ事象が n 回の試行中 x 回おこることを考えた

N回試行における
発生回数の期待値

$\lambda = n\,p$ とおく

$$P(x) = {}_nC_x\ p^x(1-p)^{n-x} = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) = 1,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x = 1,$$

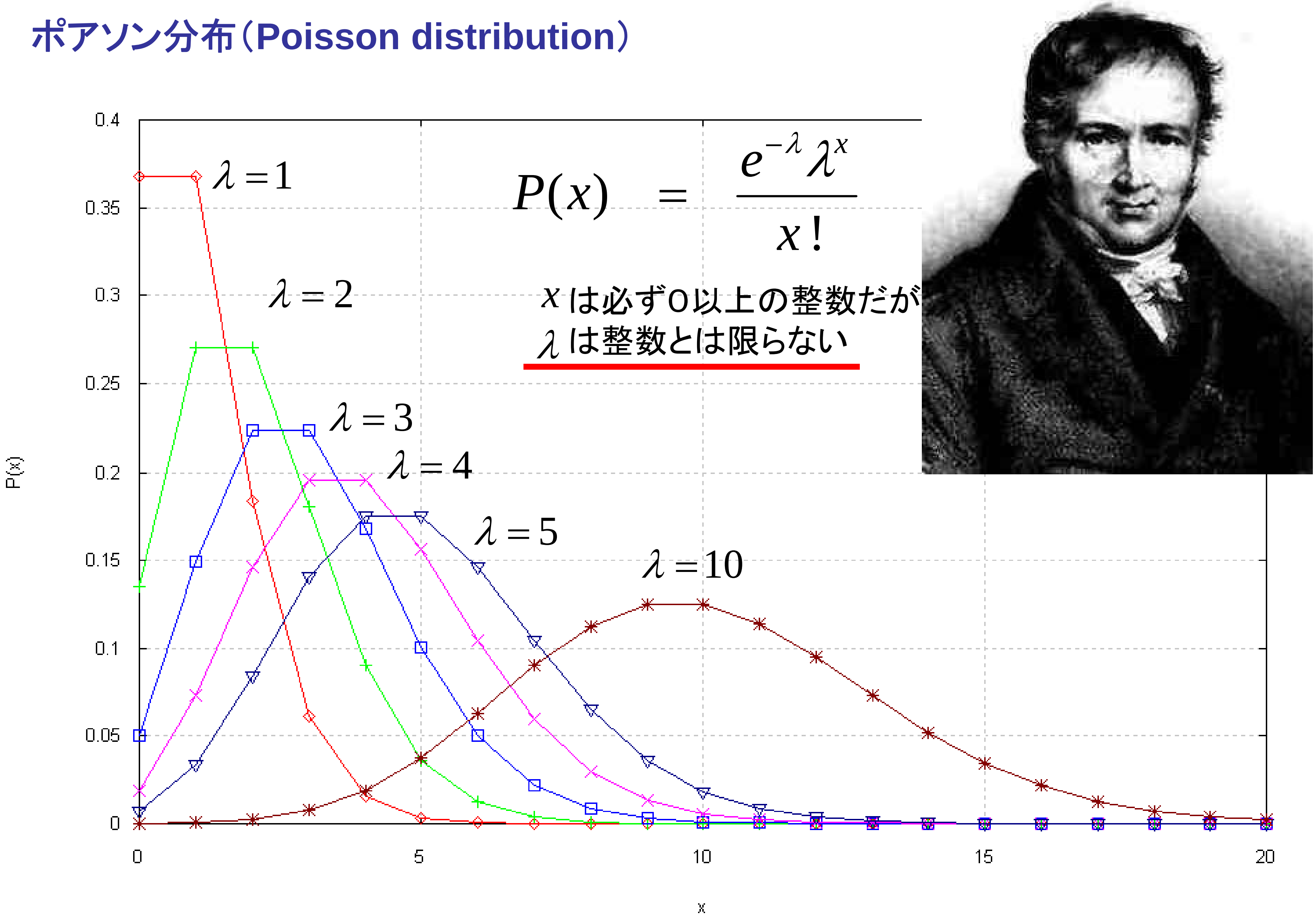
よって

$$P(x) = \lim_{n\to\infty}{}_nC_x\ p^x(1-p)^{n-x} = \boxed{\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}$$

ポアソン分布は
二項分布の極限

Simeon Denis Poisson （1781－1840）
（France）

ポアソン分布（Poisson distribution）



$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x\,!}$$

x は必ず0以上の整数だが
λ は整数とは限らない

確率変数のとりうる値が離散かつ無限個の場合（2）

ポアソン分布（Poisson distribution）

発生時間間隔は
指数分布（次回）

単位時間あたり平均で λ 回発生する事象が、

単位時間に x 回（ゼロを含む）発生する確率

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

ポアソン分布の現れる例：

備考：$x=0$ のとき $x!=1$

●1分間に放射性物質から放射される粒子が平均2個観測されるとき、
　1分間に1個も観測されない確率は？

●ある地域において、年間の交通事故件数が平均730件のとき、
　1日に発生する事故の件数が0件である確率は？

●ある機械で部品を 10000個作ると、平均 5個の不良品ができるとき、
部品を 1000個作ったときに不良品が0個である確率は？
不良品が1個出る確率は？

確率変数のとりうる値が離散かつ無限個の場合(２)

ポアソン分布(Poisson distribution)

発生時間間隔は指数分布(次回)

単位時間あたり平均で λ　回発生する事象が、

単位時間に x　回(ゼロを含む)発生する確率

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x\,!}$$

ポアソン分布の現れる例:

備考: $x=0$ のとき $x\,!=1$

●１分間に放射性物質から放射される粒子が平均２個観測されるとき、
　１分間に１個も観測されない確率は？

●ある地域において、年間の交通事故件数が平均730件のとき、
　１日に発生する事故の件数が0件である確率は？

同一の問題

事故発生は
1日あたり2件

$$\lambda = 2 \qquad P(0) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0\,!} = e^{-2} = 0.135$$

●ある機械で部品を 10000個作ると、平均 5個の不良品ができるとき、
部品を 1000個作ったときに不良品が0個である確率は？
不良品が1個出る確率は？

$$P(0) = \frac{e^{-0.5}0.5^{0}}{0\,!} = e^{-0.5} = 0.607$$

「1000個作ったとき」を単位時間とすると　$\lambda = 0.5$

$$P(1) = \frac{e^{-0.5}0.5^{1}}{1\,!} = 0.5e^{-0.5} = 0.303$$

まとめ

・離散な確率変数・確率分布関数

・**期待値**と**分散**
「確率変数の合計の期待値」＝「確率変数の期待値の合計」
「確率変数の合計の分散」＝「確率変数の分散の合計」 ← ただし全てが**互いに独立**

・２変数の確率変数
期待値・分散・**共分散**　　同時確率・周辺確率

・離散な確率分布関数の例
１）**一様分布**（サイコロ）
２）**幾何分布**（コイン投げで最初に表が出るまでの回数の確率）
３）**ベルヌーイ分布**（確率pで1、さもなければ0）
４）**二項分布**（独立なベルヌーイ分布の試行をn回実行したとき事象がx回起きる確率）
５）**ポアソン分布**（単位時間あたり発生回数λの事象がx回起こる確率）
→ 単位時間あたりの事故や故障の発生件数のモデルとしてよく出てくる

【演習問題】　2017.04.18　学籍番号　氏名

（1）確率 p で x = 1, 確率 1ーp で x = ー1 の値をとる確率変数 x の期待値と分散を計算せよ。

（2）以下の式で与えられる二項分布の期待値と分散を答えよ。導出過程も明記せよ。

$$P(x) = B(n, p) = \frac{n!}{x!\left(n-x\right)!} p^{x} (1-p)^{n-x}$$