九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

海事統計学　第3回 （担当：木村）

確率論の基礎1
（事象と標本空間・条件付き確率）

場所：　船2講義室

授業の資料等は

http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html

事象と確率　　コルモゴロフの公理

・**試行**：　その結果が偶然に支配されているような実験や観測
・**事象**：　試行の結果として起こりうる事柄
・各事象には、**確率**が付与される

【確率の公理１】 どのような事象 A に対しても、その確率 P(A)は 0 と 1 の間の値をとる。
すなわち　$0 \leqq P(A) \leqq 1$
【確率の公理２】 あらゆる可能な事象全体の集合をSとすれば、Sの確率は１である。
すなわち　$P(S) = 1$
【確率の公理３】 同時には起こりえない（これを互いに排反という）有限個あるいは無限個だが番号が付けられる事象をA1, A2, A3, …とするとき、A1, A2, A3, …のいずれかがおこる確率は,それぞれの事象が起こる確率の和に等しい
すなわち　$P(A1 \cup A2 \cup A3 \cup \ldots) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + \ldots$

例）　サイコロを1回振る
「１の目が出る」事象の確率　１／６
「２の目が出る」事象の確率　１／６
「４以上の目が出る」事象の確率　３／６＝１／２

・ある事象Aが起こらないこと、すなわちAではない事象のことをAの $\boxed{}$ $\overline{A}$ と呼ぶ

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

事象と確率　　　コルモゴロフの公理

・**試行**：　その結果が偶然に支配されているような実験や観測
・**事象**：　試行の結果として起こりうる事柄
・各事象には、**確率**が付与される

【確率の公理1】 どのような事象 A に対しても、その確率 P(A)は 0 と 1 の間の値をとる。
すなわち　$0 \leqq P(A) \leqq 1$
【確率の公理2】 あらゆる可能な事象全体の集合をSとすれば、Sの確率は1である。
すなわち　$P(S) = 1$
【確率の公理3】 同時には起こりえない(これを互いに排反という)有限個あるいは無限個だが番号が付けられる事象をA1, A2, A3, …とするとき、A1, A2, A3, …のいずれかがおこる確率は,それぞれの事象が起こる確率の和に等しい
すなわち　$P(A1 \cup A2 \cup A3 \cup \ldots) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + \ldots$

例）　サイコロを1回振る
「1の目が出る」事象の確率　1／6
「2の目が出る」事象の確率　1／6
「4以上の目が出る」事象の確率　3／6＝1／2

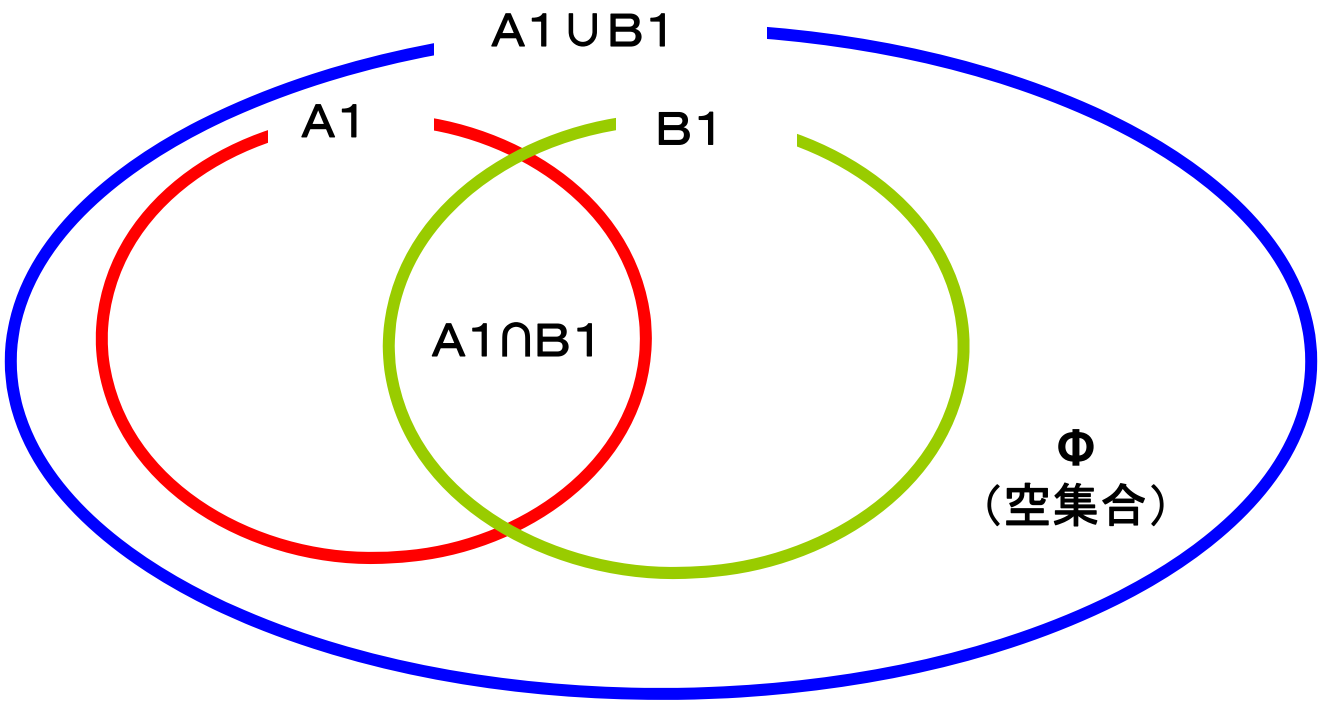
・ある事象Aが起こらないこと、すなわちAではない事象のことをAの $\boxed{\textbf{余事象}}$ $\overline{A}$ と呼ぶ

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

加法定理

・事象 A1 の起きる確率　P(A1)
・事象 B1 の起きる確率　P(B1)
・事象 A1 および B1 のうち少なくともそのどちらか1つが起こる事象 A1∪B1
　　　およびび事象　A1∪B1の起こる確率　P(A1∪B1)
・事象 A1 および B1 が同時に起こる事象 A1∩B1
　　　および事象　A1∩B1　が起こる確率 P(A1∩B1)

このとき



例)　サイコロ
事象A　5の目
事象B　3以上の目

事象A∪B
＝{3, 4, 5, 6}

事象A∩B
＝{5}

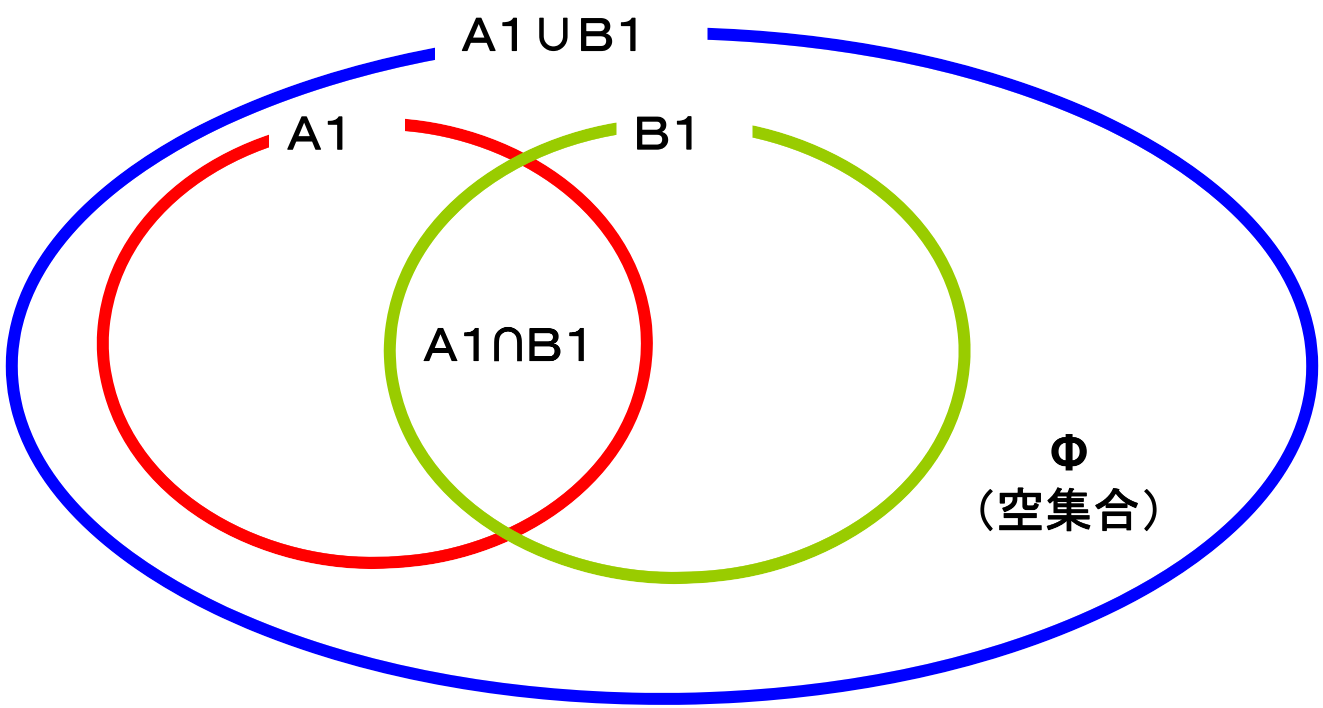
加法定理

・事象 A1 の起きる確率　P(A1)
・事象 B1 の起きる確率　P(B1)
・事象 A1 および B1 のうち少なくともそのどちらか1つが起こる事象 A1∪B1
　　および事象　A1∪B1の起こる確率　P(A1∪B1)
・事象 A1 およびB1 が同時に起こる事象 A1∩B1
　　および事象　A1∩B1　が起こる確率 P(A1∩B1)

同時確率(joint probability)

このとき

$$\boxed{P(A1\cup B1)=P(A1)+P(B1)-P(A1\cap B1)}$$



例)　サイコロ
事象A　5の目
事象B　3以上の目

事象A∪B
＝{3, 4, 5, 6}

事象A∩B
＝{5}

【練習問題1】

３個のサイコロを同時に投げたとき、少なくともどれか１つは1の目が出る確率を求めよ。
（ヒント:　全てのサイコロが１以外の目になる事象をAとおき、余事象を考えよ）

【練習問題2】

カード１００枚にそれぞれ１から１００までの番号が書かれている。この中からランダムに１枚のカードを引くとき、そのカードの番号が2または3の倍数である確率を求めよ。
（ヒント:　加法定理を利用する）

【練習問題1】

３個のサイコロを同時に投げたとき、少なくともどれか１つは1の目が出る確率を求めよ。
（ヒント：　全てのサイコロが１以外の目になる事象をAとおき、余事象を考えよ）

事象Aの確率は、$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$

事象　A　と、その余事象 $\overline{A}$ との関係は　$P(A)+P(\overline{A})=1$ であるから

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$

【練習問題2】

カード100枚にそれぞれ1から100までの番号が書かれている。この中からランダムに
１枚のカードを引くとき、そのカードの番号が2または3の倍数である確率を求めよ。
（ヒント：　加法定理を利用する）

事象A：　カードが2の倍数 $P(A)=\frac{50}{100}$

事象B：　カードが3の倍数 $P(B)=\frac{33}{100}$

事象A∩B　カードが6の倍数 $P(A\cap B)=\frac{16}{100}$

よって

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{50}{100}+\frac{33}{100}-\frac{16}{100}$$
$$=\frac{67}{100}$$

条件付き確率（conditional probability）

事象 A1 と B1 が考えられるとき、事象 A1 が起こったという条件の下では
事象 B1 の確率はどうなるか

条件部

$$\underline{P(B_1 \mid A_1)} = \boxed{}$$

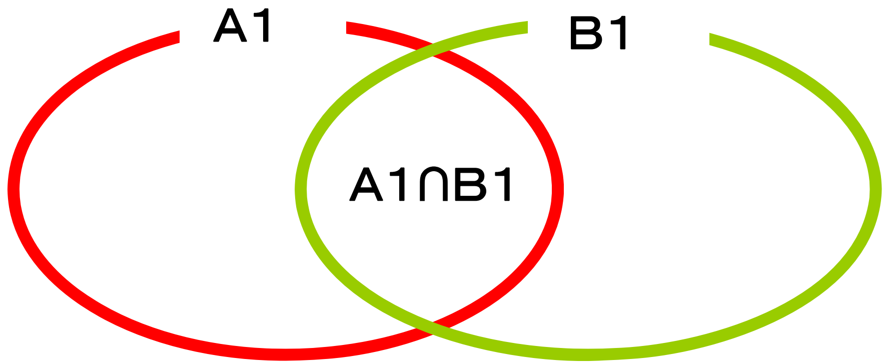
事象A1∩B1の
同時確率

事象A1が発生した条件下での
事象B1の確率：条件付確率

条件部A1が起こる全ての事象
の確率を合計した確率
（**周辺確率：marginal probability**）

事象A1が発生したら、新たな標本空間は
事象A1を占める領域に限定される

→　確率の値もその領域に合わせて比例配分



条件付き確率（conditional probability）

事象 A1 と B1 が考えられるとき、事象 A1 が起こったという条件の下では
事象 B1 の確率はどうなるか

条件部

$$\underline{P(B_1 \mid A_1)} = \boxed{\frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)}}$$

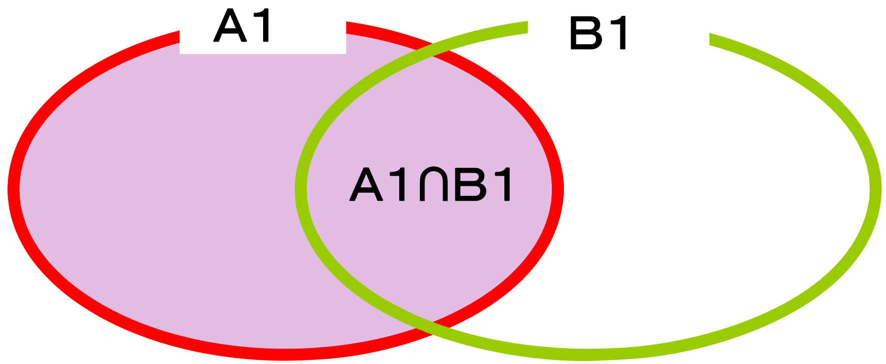
事象A1∩B1の
同時確率

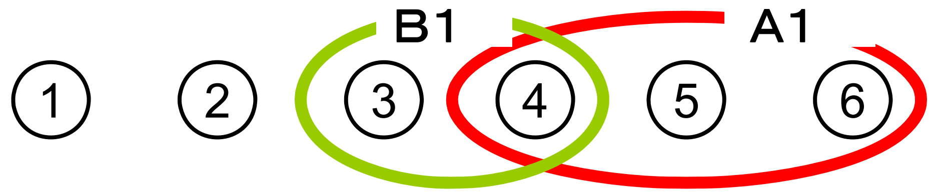
事象A1が発生した条件下での
事象B1の確率：条件付確率

条件部A1が起こる全ての事象
の確率を合計した確率
（**周辺確率：marginal probability**）

事象A1が発生したら、新たな標本空間は
事象A1を占める領域に限定される

→ 確率の値もその領域に合わせて比例配分



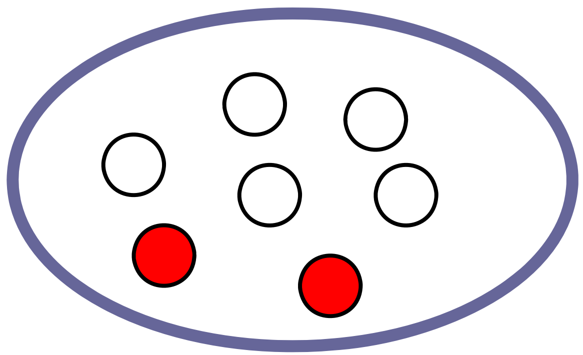


例1）　サイコロ
事象A1　　4以上の目
事象B1　　3または4の目が出る

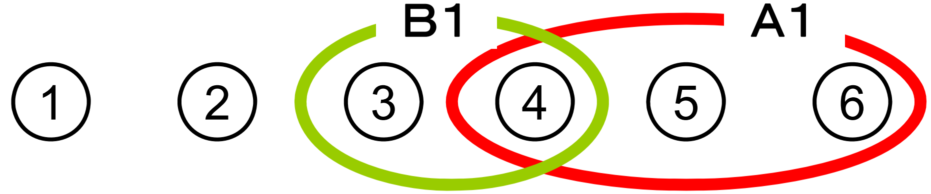
$$P(B_1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} =$$

例2）　袋に赤球が2個、白球が5個入っている。
袋からランダムに1個取り出して何色かを調べた後、取り出した球をもとに戻さずにもう一度球をランダムに取り出す。

事象A1：　1回目で赤を取り出す
事象B1：　2回目で赤を取り出す



$$P(B_1 \mid A_1) =$$

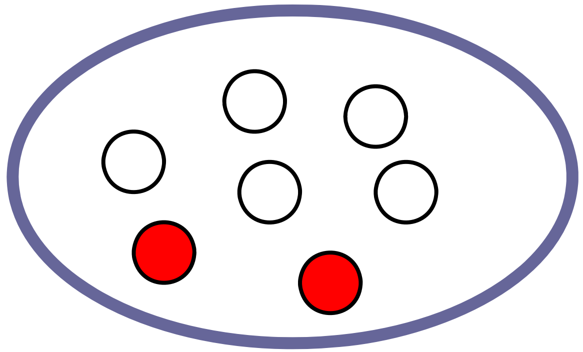


例１） サイコロ
事象Ａ１　　４以上の目
事象Ｂ１　　３または4の目が出る

$$P(B_1 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

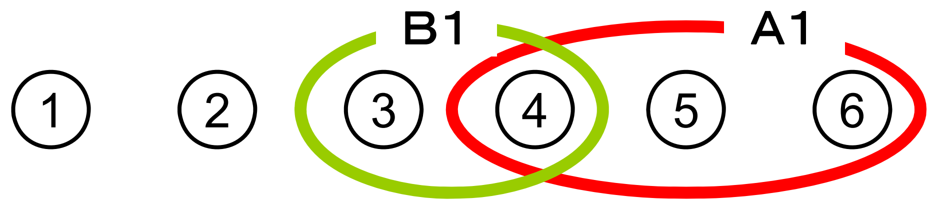
例２） 袋に赤球が２個、白球が5個入っている。
　　袋からランダムに1個取り出して何色かを調べた後、取り出した球をもとに戻さずにもう一度球をランダムに取り出す。

事象Ａ１：　１回目で赤を取り出す
事象Ｂ１：　２回目で赤を取り出す



$$P(B_1 | A_1) =$$

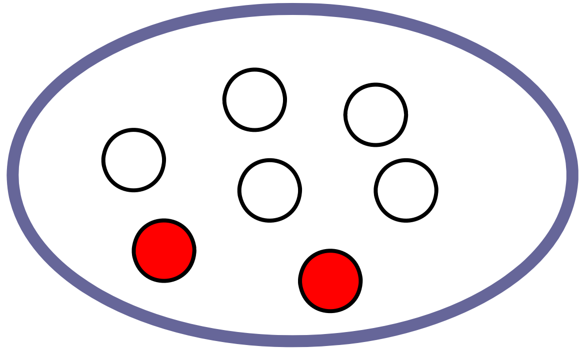
例1）　サイコロ
事象A1　　4以上の目
事象B1　　3または4の目が出る



$$P(B_1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

例2）　袋に赤球が2個、白球が5個入っている。
袋からランダムに1個取り出して何色かを調べた後、取り出した球をもとに戻さずにもう一度球をランダムに取り出す。

事象A1：　1回目で赤を取り出す
事象B1：　2回目で赤を取り出す



$$P(B_1 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{2}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{6}$$

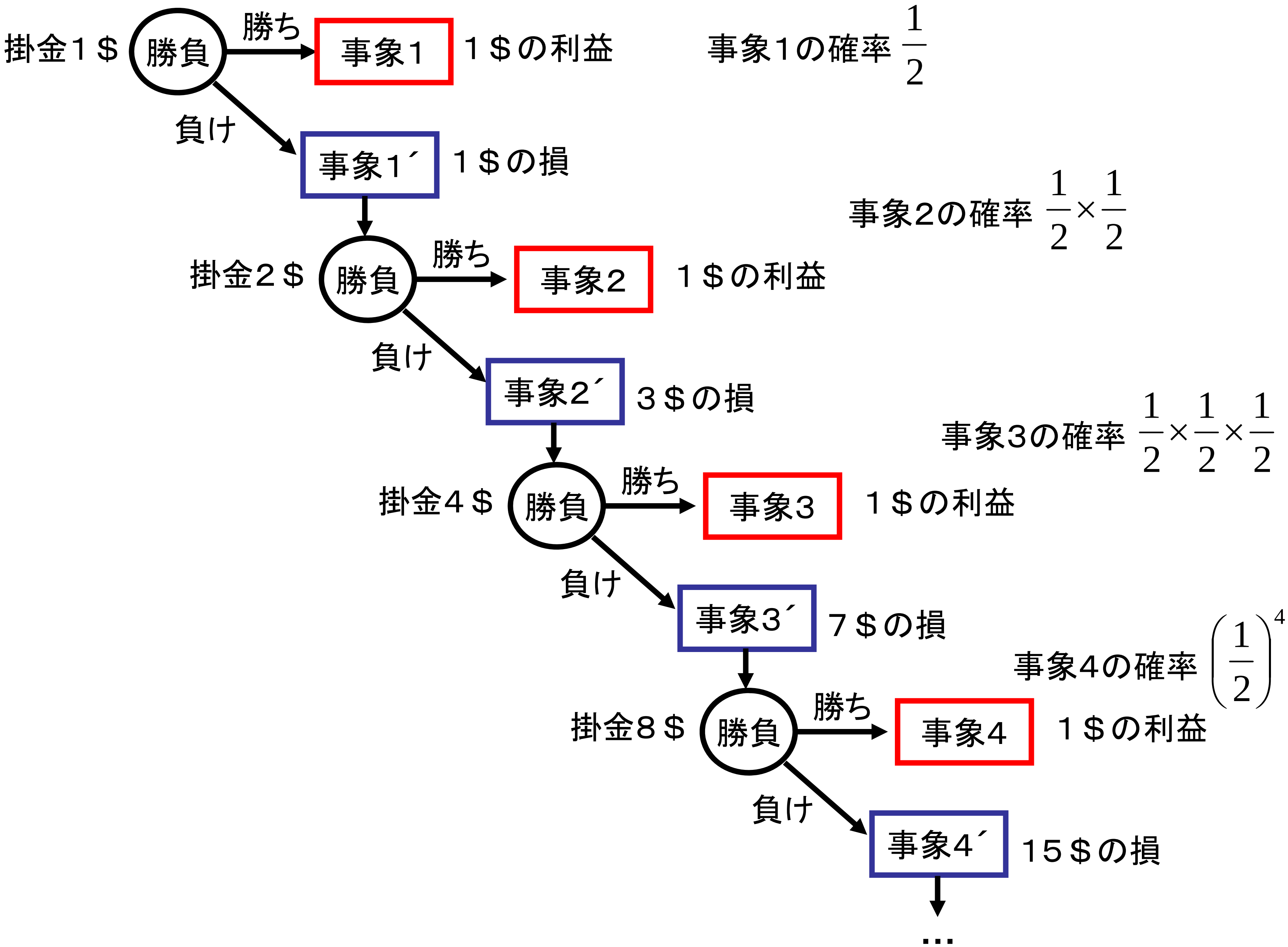
【練習問題】 倍掛け賭博（マルチンゲールの必勝法）

１回あたりの勝率が2分の１で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される賭博において、以下のような戦略でプレイする:

・最大で１０回まで勝負する。且つ
・１回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
・最初は１＄を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

このとき、
１） プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

２） 現在、５回ほど勝負に負けている状況にあるとする。
このとき、プレイの結果持ち金がプラスになる確率を求めよ。


掛金1＄
勝負
勝ち
事象1
1＄の利益
事象1の確率 $\frac{1}{2}$
負け
事象1´
1＄の損
事象2の確率 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
掛金2＄
勝負
勝ち
事象2
1＄の利益
負け
事象2´
3＄の損
事象3の確率 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
掛金4＄
勝負
勝ち
事象3
1＄の利益
負け
事象3´
7＄の損
事象4の確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^4$
掛金8＄
勝負
勝ち
事象4
1＄の利益
負け
事象4´
15＄の損
…

【練習問題】 倍掛け賭博（マルチンゲールの必勝法）

１回あたりの勝率が2分の１で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される賭博において、以下のような戦略でプレイする:

・最大で１０回まで勝負する。且つ
・１回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
・最初は１＄を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

勝てば必ずプラス

負ける事象の確率を考えて1から引く

このとき、
１） プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1023}{1024}=0.999$$

２） 現在、５回ほど勝負に負けている状況にあるとする。
このとき、プレイの結果持ち金がプラスになる確率を求めよ。

【練習問題】 倍掛け賭博(マルチンゲールの必勝法)

1回あたりの勝率が2分の1で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される賭博において、以下のような戦略でプレイする:

- 最大で10回まで勝負する。且つ
- 1回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
- 最初は1＄を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

勝てば必ずプラス

負ける事象の確率を考えて1から引く

このとき、

1) プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1023}{1024}=0.999$$

2) 現在、5回ほど勝負に負けている状況にあるとする。
　このとき、プレイの結果持ち金がプラスになる確率を求めよ。

事象A1: 5回負ける

事象A2: 持ち金がプラス

事象5‘が起きたという**条件付確率**を考える

$$P(A_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$P(A_1\cap A_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$$

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{31}{32}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{31}{32}$$

条件付き確率と独立性

$$P(B_1 \mid A_1) \quad = \quad P(B_1)$$

または $$P(A_1 \mid B_1) \quad = \quad P(A_1)$$

であるとき、事象A1とB1は　　　　　　　　であるという

事象A1とB1が独　　であるとき、A1∩B1の確率（同時確率）は

$$P(A_1 \cap B_1) \quad =$$

例）　コインAとBを同時に投げる

事象A1　　コインAが表

事象B1　　コインBが表

→ コインAもコインBも、裏表の出方は互いに無関係

条件付き確率と独立性

$$P(B_1 \mid A_1) \quad = \quad P(B_1)$$

または $$P(A_1 \mid B_1) \quad = \quad P(A_1)$$

であるとき、事象A1とB1は **独立（independent）** であるという

事象A1とB1が独立であるとき、A1∩B1の確率（同時確率）は

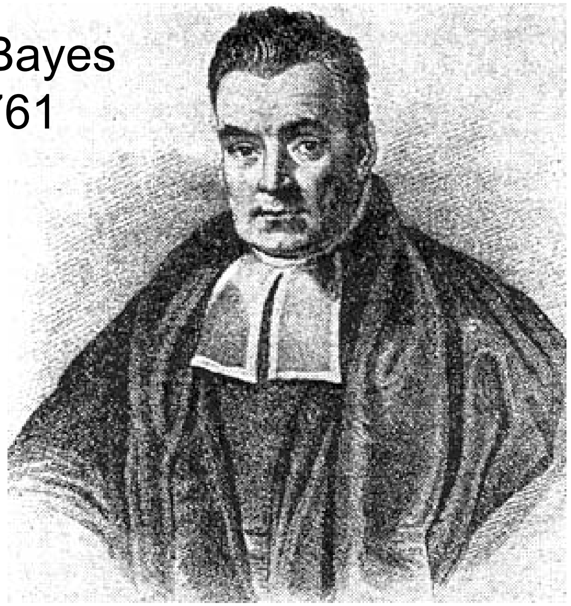
$$P(A_1 \cap B_1) \quad = \boxed{P(A_1)P(B_1)}$$

例） コインAとBを同時に投げる
事象A1　　コインAが表
事象B1　　コインBが表

→ コインAもコインBも、裏表の出方は互いに無関係

ベイズ（Bayes）の定理

Thomas Bayes
1702－1761



例） ある病院で腫瘍検査を受ける人について、
ガンである人の割合　1000人中5人
ガンの人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.95
ガンではない人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.055

ある患者が腫瘍マーカで検査したところ陽性だった
この患者がガンである確率は？

原因となる事象
A1：　患者がガン
A2：　患者が非ガン

結果となる事象
B1：　検査が陽性
B2：　検査が陰性

ガン患者の割合より

$P(A_1) = \boxed{}$

$P(A_2) = \boxed{}$

事象Bが観測される前の
周辺確率という意味で

$\boxed{}$

腫瘍マーカの性能より

$P(B_1 \mid A_1) = \boxed{}$

$P(B_1 \mid A_2) = \boxed{}$

もっともらしさを表す
条件付確率：**尤度**（likelihood）

求める確率は

$P(A_1 \mid B_1)$

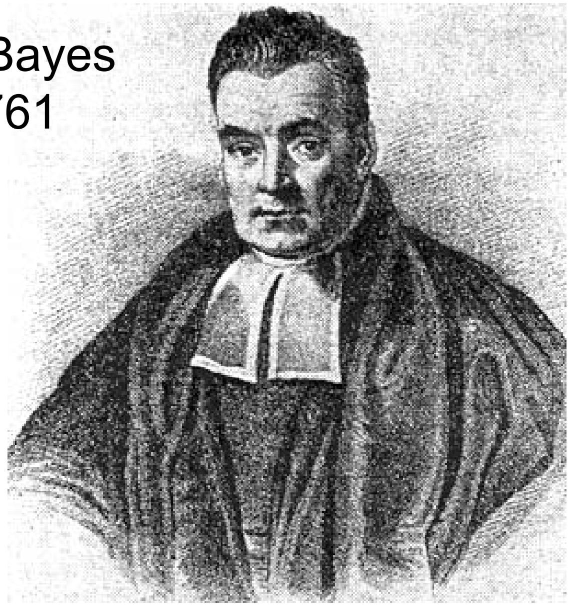
$P(A_2 \mid B_1)$

事象B1が起こった後の
条件付確率という意味で

$\boxed{}$

ベイズ(Bayes)の定理

Thomas Bayes
1702－1761



例） ある病院で腫瘍検査を受ける人について、
ガンである人の割合　1000人中5人
ガンの人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.95
ガンではない人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.055

ある患者が腫瘍マーカで検査したところ陽性だった
この患者がガンである確率は？

原因となる事象
A1： 患者がガン
A2： 患者が非ガン

結果となる事象
B1： 検査が陽性
B2： 検査が陰性

求める確率は

$$P(A_1 \mid B_1)$$

$$P(A_2 \mid B_1)$$

事象B1が起こった後の
条件付確率という意味で
事後確率
(posterior probability)

ガン患者の割合より

$$P(A_1) = \boxed{0.005}$$

$$P(A_2) = \boxed{0.995}$$

事象Bが観測される前の
周辺確率という意味で
事前確率(prior probability)

腫瘍マーカの性能より

$$P(B_1 \mid A_1) = \boxed{0.95}$$

$$P(B_1 \mid A_2) = \boxed{0.055}$$

もっともらしさを表す
条件付確率：**尤度**(likelihood)

ベイズ（Bayes）の定理

例題に沿って説明すると

条件付確率の公式より

事後確率

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_1)}$$

マーカ陽性の条件下で
患者がガンである確率

事前確率

尤度

患者がガンで且つ
マーカで陽性になる確率

$$= \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{P(A_1)P(B_1 | A_1) + P(A_2)P(B_1 | A_2))} = \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.055}$$

事前確率

尤度

患者がガンで、且つ
マーカで陽性になる確率

患者が非ガンで、且つ
マーカが陽性になる確率

$$= 0.080$$

事後の確率が事前確率と尤度で表される

ベイズ(Bayes)の定理

もっと一般的に書くと

条件付確率の公式より

事後確率

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)}$$

事前確率

尤度

$$= \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}}$$

条件部の事象Bが起こる全ての事象の確率を　合計した確率（**周辺確率**）

尤度

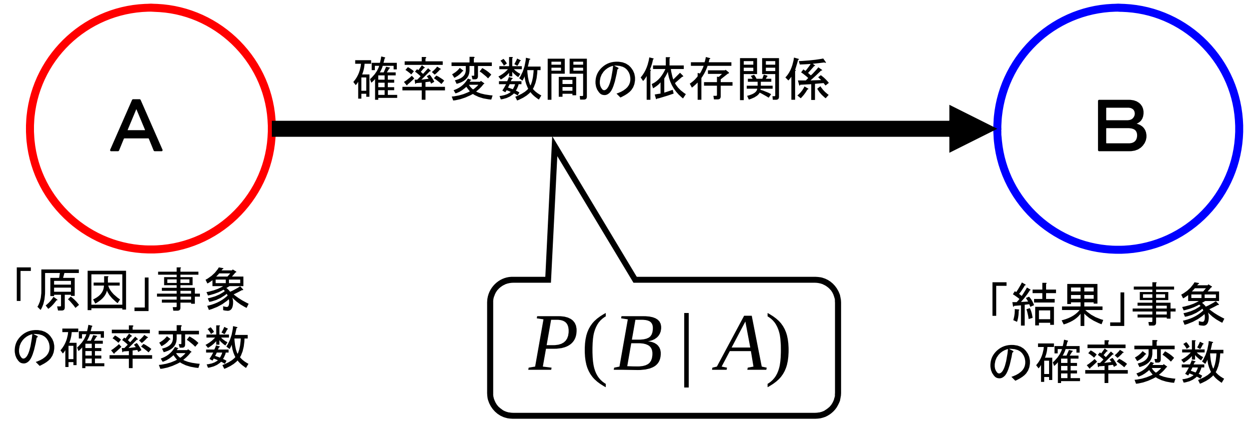
事前確率

事後の確率が**事前確率**と**尤度**で表される

サイコロの例題(4以上の目が出る事象A1、3以下の目が出る事象A2, 3または4の目が出る事象B1、3と4以外の目が出る事象B2)とした場合について計算すると分かりやすい

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

確率変数間の依存関係をグラフィカルに表現



知りたい事象が観測できなくても、関連する事象の観測結果より、
知りたい事象の状態（変数の値）をより正確に推定できる。

ベイズの定理より

事前確率　尤度

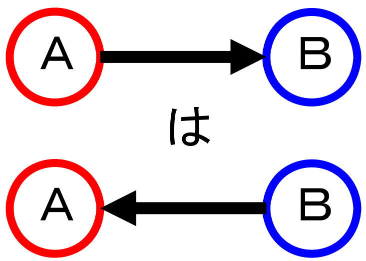
事後確率

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

事前確率　尤度

Aの事前分布が不明の場合、
一様分布（全て等確率）として与える

$$=\frac{P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)}$$



へ書き換え可能

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

ベイズの定理
での例題

直接観測できない

原因となる事象
A1：　患者がガン
A2：　患者が非ガン

→

結果となる事象
B1：　検査が陽性
B2：　検査が陰性

ガン患者の割合より

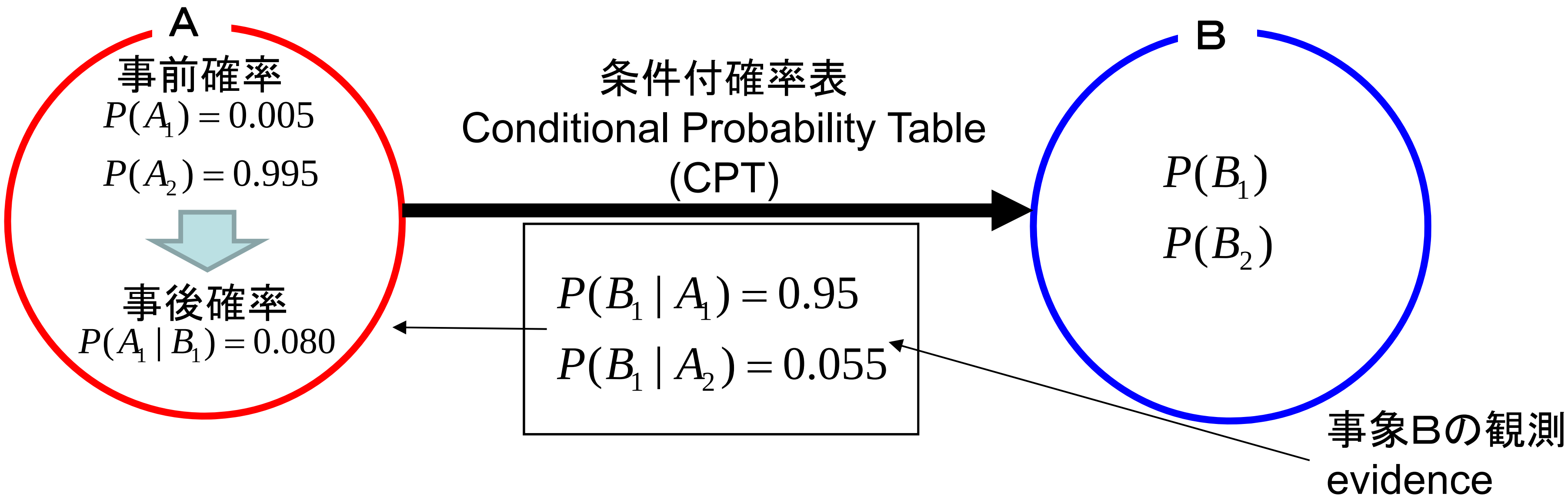
事前確率

$$P(A_1) = 0.005$$
$$P(A_2) = 0.995$$

腫瘍マーカの性能より

尤度

$$P(B_1 \mid A_1) = 0.95$$
$$P(B_1 \mid A_2) = 0.055$$



事象Bの観測結果よりCPTを通じてAの確率が更新された → belief の伝播

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

直接観測できない

事象A1：喫煙者
事象A2：非喫煙

→

事象B1：肺ガン
事象B2：肺気腫
事象B3：その他

→

事象C1：レントゲン陽性
事象C2：レントゲン陰性

事象A1のとき
$$P(B_1 \mid A_1) = 0.6$$
$$P(B_2 \mid A_1) = 0.3$$
$$P(B_3 \mid A_1) = 0.1$$

事象A2のとき
$$P(B_1 \mid A_2) = 0.3$$
$$P(B_2 \mid A_2) = 0.3$$
$$P(B_3 \mid A_2) = 0.4$$

事象B1のとき
$$P(C_1 \mid B_1) = 0.8$$
$$P(C_2 \mid B_1) = 0.2$$

事象B2のとき
$$P(C_1 \mid B_2) = 0.1$$
$$P(C_2 \mid B_2) = 0.9$$

事象B3のとき
$$P(C_1 \mid B_3) = 0.5$$
$$P(C_2 \mid B_3) = 0.5$$

順方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1) = 1$$
$$P(A_2) = 0$$

→ 事象Bの条件付確率 → 事象Cの条件付確率

$$P(C_1 \mid A_1)$$
$$P(C_2 \mid A_1)$$

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

直接観測できない

事象A1：喫煙者
事象A2：非喫煙

→

事象B1：肺ガン
事象B2：肺気腫
事象B3：その他

→

事象C1：レントゲン陽性
事象C2：レントゲン陰性

事象A1のとき
$$P(B_1 \mid A_1) = 0.6$$
$$P(B_2 \mid A_1) = 0.3$$
$$P(B_3 \mid A_1) = 0.1$$

事象A2のとき
$$P(B_1 \mid A_2) = 0.3$$
$$P(B_2 \mid A_2) = 0.3$$
$$P(B_3 \mid A_2) = 0.4$$

事象B1のとき
$$P(C_1 \mid B_1) = 0.8$$
$$P(C_2 \mid B_1) = 0.2$$

事象B2のとき
$$P(C_1 \mid B_2) = 0.1$$
$$P(C_2 \mid B_2) = 0.9$$

事象B3のとき
$$P(C_1 \mid B_3) = 0.5$$
$$P(C_2 \mid B_3) = 0.5$$

順方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1) = 1$$
$$P(A_2) = 0$$

→ 事象Bの条件付確率

$$\boxed{\begin{aligned} P(B_1 \mid A_1) &= 0.6 \\ P(B_2 \mid A_1) &= 0.3 \\ P(B_3 \mid A_1) &= 0.1 \end{aligned}}$$

→ 事象Cの条件付確率

$$P(C_1 \mid A_1)$$
$$P(C_2 \mid A_1)$$

Bの条件付確率

Cの条件付確率

$$P(C_1 \mid A_1) = P(B_1 \mid A_1)P(C_1 \mid B_1) + P(B_2 \mid A_1)P(C_1 \mid B_2) + P(B_3 \mid A_1)P(C_1 \mid B_3)$$

$$= 0.6 \times 0.8 + 0.3 \times 0.1 + 0.1 \times 0.5$$

$$= 0.56$$

$$P(C_2 \mid A_1) = P(B_1 \mid A_1)P(C_2 \mid B_1) + P(B_2 \mid A_1)P(C_2 \mid B_2) + P(B_3 \mid A_1)P(C_2 \mid B_3)$$

$$= 0.6 \times 0.2 + 0.3 \times 0.9 + 0.1 \times 0.5$$

$$= 0.44$$

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

直接観測できない

事象A1：喫煙者
事象A2：非喫煙

→

事象B1：肺ガン
事象B2：肺気腫
事象B3：その他

→

事象C1：レントゲン陽性
事象C2：レントゲン陰性

事象A1のとき
$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_1) = 0.6 \\ P(B_2 \mid A_1) = 0.3 \\ P(B_3 \mid A_1) = 0.1 \end{cases}$$

事象A2のとき
$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_2) = 0.3 \\ P(B_2 \mid A_2) = 0.3 \\ P(B_3 \mid A_2) = 0.4 \end{cases}$$

事象B1のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_1) = 0.8 \\ P(C_2 \mid B_1) = 0.2 \end{cases}$$

事象B2のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_2) = 0.1 \\ P(C_2 \mid B_2) = 0.9 \end{cases}$$

事象B3のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_3) = 0.5 \\ P(C_2 \mid B_3) = 0.5 \end{cases}$$

逆方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事後確率 ← 事象Bの事後確率 ← 事象Cの周辺確率または観測

$P(A_1 \mid C_1)$

$P(A_2 \mid C_1)$

$P(C_1) = 1$

$P(C_2) = 0$

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

事象A1：喫煙者
事象A2：非喫煙

事象B1：肺ガン
事象B2：肺気腫
事象B3：その他

事象C1：レントゲン陽性
事象C2：レントゲン陰性

事象A1のとき
$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_1) = 0.6 \\ P(B_2 \mid A_1) = 0.3 \\ P(B_3 \mid A_1) = 0.1 \end{cases}$$

事象A2のとき
$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_2) = 0.3 \\ P(B_2 \mid A_2) = 0.3 \\ P(B_3 \mid A_2) = 0.4 \end{cases}$$

事象B1のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_1) = 0.8 \\ P(C_2 \mid B_1) = 0.2 \end{cases}$$

事象B2のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_2) = 0.1 \\ P(C_2 \mid B_2) = 0.9 \end{cases}$$

事象B3のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_3) = 0.5 \\ P(C_2 \mid B_3) = 0.5 \end{cases}$$

逆方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事後確率

$$P(A_1 \mid C_1)$$
$$P(A_2 \mid C_1)$$

事象Bの事後確率

$$P(B_1 \mid C_1)$$
$$P(B_2 \mid C_1)$$
$$P(B_3 \mid C_1)$$

事象Cの周辺確率
または観測

$$P(C_1) = 1$$
$$P(C_2) = 0$$

ベイズの定理より

事前確率が不明の場合
一様分布にしておく

$$P(B_1 \mid C_1) = \frac{P(B_1)P(C_1 \mid B_1)}{P(B_1)P(C_1 \mid B_1) + P(B_2)P(C_1 \mid B_2) + P(B_3)P(C_1 \mid B_3)}$$

$$= \frac{{}^{1}\!/_{3} \times 0.8}{{}^{1}\!/_{3} \times 0.8 + {}^{1}\!/_{3} \times 0.1 + {}^{1}\!/_{3} \times 0.5} = \frac{4}{7}$$

$$P(B_2 \mid C_1) = \frac{P(B_2)P(C_1 \mid B_2)}{P(B_1)P(C_1 \mid B_1) + P(B_2)P(C_1 \mid B_2) + P(B_3)P(C_1 \mid B_3)}$$

$$= \frac{{}^{1}\!/_{3} \times 0.1}{{}^{1}\!/_{3} \times 0.8 + {}^{1}\!/_{3} \times 0.1 + {}^{1}\!/_{3} \times 0.5} = \frac{1}{14}$$

$$P(B_3 \mid C_1) = \frac{P(B_3)P(C_1 \mid B_3)}{P(B_1)P(C_1 \mid B_1) + P(B_2)P(C_1 \mid B_2) + P(B_3)P(C_1 \mid B_3)}$$

$$= \frac{{}^{1}\!/_{3} \times 0.5}{{}^{1}\!/_{3} \times 0.8 + {}^{1}\!/_{3} \times 0.1 + {}^{1}\!/_{3} \times 0.5} = \frac{5}{14}$$

ベイズの定理より

$$P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.6}{\frac{1}{2}\times 0.6+\frac{1}{2}\times 0.3}=\frac{2}{3}$$

$$P(A_1|B_2)=\frac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(A_1)P(B_2|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.3}{\frac{1}{2}\times 0.3+\frac{1}{2}\times 0.3}=\frac{1}{2}$$

$$P(A_1|B_3)=\frac{P(A_1)P(B_3|A_1)}{P(A_1)P(B_3|A_1)+P(A_2)P(B_3|A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.1}{\frac{1}{2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 0.4}=\frac{1}{5}$$

よって

$$P(A_1|C_1)=P(A_1|B_1)P(B_1|C_1)+P(A_1|B_2)P(B_2|C_1)+P(A_1|B_3)P(B_3|C_1)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{14}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{14}=\frac{41}{84}$$

もし事象C2が観測された場合　　　　ベイズの定理より

$$P(B_1 | C_2) = \frac{P(B_1)P(C_2 | B_1)}{P(B_1)P(C_2 | B_1) + P(B_2)P(C_2 | B_2) + P(B_3)P(C_2 | B_3)}$$

$$= \frac{1/3 \times 0.2}{1/3 \times 0.2 + 1/3 \times 0.9 + 1/3 \times 0.5} = \frac{1}{8}$$

$$P(B_2 | C_2) = \frac{P(B_2)P(C_2 | B_2)}{P(B_1)P(C_2 | B_1) + P(B_2)P(C_2 | B_2) + P(B_3)P(C_2 | B_3)}$$

$$= \frac{1/3 \times 0.9}{1/3 \times 0.2 + 1/3 \times 0.9 + 1/3 \times 0.5} = \frac{9}{16}$$

$$P(B_3 | C_2) = \frac{P(B_3)P(C_2 | B_3)}{P(B_1)P(C_2 | B_1) + P(B_2)P(C_2 | B_2) + P(B_3)P(C_2 | B_3)}$$

$$= \frac{1/3 \times 0.5}{1/3 \times 0.2 + 1/3 \times 0.9 + 1/3 \times 0.5} = \frac{5}{16}$$

もし事象C2が観測された場合

事前確率が不明の場合
一様分布にしておく

ベイズの定理より

$$P(A_1 \mid B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1 \mid A_1)}{P(A_1)P(B_1 \mid A_1) + P(A_2)P(B_1 \mid A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.6}{\frac{1}{2} \times 0.6 + \frac{1}{2} \times 0.3} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_1 \mid B_2) = \frac{P(A_1)P(B_2 \mid A_1)}{P(A_1)P(B_2 \mid A_1) + P(A_2)P(B_2 \mid A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.3}{\frac{1}{2} \times 0.3 + \frac{1}{2} \times 0.3} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \mid B_3) = \frac{P(A_1)P(B_3 \mid A_1)}{P(A_1)P(B_3 \mid A_1) + P(A_2)P(B_3 \mid A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.1}{\frac{1}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.4} = \frac{1}{5}$$

よって

$$P(A_1 \mid C_2) = P(A_1 \mid B_1)P(B_1 \mid C_2) + P(A_1 \mid B_2)P(B_2 \mid C_2) + P(A_1 \mid B_3)P(B_3 \mid C_2)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{16} = \frac{17}{24}$$

ベイジアンネットワーク（Bayesian network）

直接観測できない

事象A1：喫煙者
事象A2：非喫煙 → 事象B1：肺ガン
事象B2：肺気腫
事象B3：その他 → 事象C1：レントゲン陽性
事象C2：レントゲン陰性

事象A1のとき
$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_1) = 0.6 \\ P(B_2 \mid A_1) = 0.3 \\ P(B_3 \mid A_1) = 0.1 \end{cases}$$

事象A2のとき
$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_2) = 0.3 \\ P(B_2 \mid A_2) = 0.3 \\ P(B_3 \mid A_2) = 0.4 \end{cases}$$

事象B1のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_1) = 0.8 \\ P(C_2 \mid B_1) = 0.2 \end{cases}$$

事象B2のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_2) = 0.1 \\ P(C_2 \mid B_2) = 0.9 \end{cases}$$

事象B3のとき
$$\begin{cases} P(C_1 \mid B_3) = 0.5 \\ P(C_2 \mid B_3) = 0.5 \end{cases}$$

両方向から belief が伝播

evidence

事象Aの事前確率
または観測 → 事象Bの確率
（信念： belief） ← 事象Cの周辺確率
または観測

evidence

$$P(A_1) = 1$$
$$P(A_2) = 0$$

$$P(B_1 \mid A_i, C_i)$$
$$P(B_2 \mid A_i, C_i)$$
$$P(B_3 \mid A_i, C_i)$$

= 条件付確率
×事後分布を計算して正規化

$$P(C_1) = 1$$
$$P(C_2) = 0$$

順方向に計算

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1)=1$$
$$P(A_2)=0$$

$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_1) = \\ P(B_2 \mid A_1) = \\ P(B_3 \mid A_1) = \end{cases}$$

evidence

事象Cの周辺確率
または観測

$$P(C_1)=1$$
$$P(C_2)=0$$

事象Bの事後確率

逆方向に計算

$$P(B_1 \mid A_1, C_1) = \frac{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1) + P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1) + P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)} = \frac{0.6 \times {}^{4}\!/_{7}}{0.6 \times {}^{4}\!/_{7} + 0.3 \times {}^{1}\!/_{14} + 0.1 \times {}^{5}\!/_{14}} = \frac{6}{7}$$

$$P(B_2 \mid A_1, C_1) = \frac{P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1) + P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1) + P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)} = \frac{0.3 \times {}^{1}\!/_{14}}{0.6 \times {}^{4}\!/_{7} + 0.3 \times {}^{1}\!/_{14} + 0.1 \times {}^{5}\!/_{14}} = \frac{3}{56}$$

$$P(B_3 \mid A_1, C_1) = \frac{P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1) + P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1) + P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)} = \frac{0.1 \times {}^{5}\!/_{14}}{0.6 \times {}^{4}\!/_{7} + 0.3 \times {}^{1}\!/_{14} + 0.1 \times {}^{5}\!/_{14}} = \frac{5}{56}$$

順方向に計算

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1)=1$$
$$P(A_2)=0$$

$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_1) = \boxed{0.6} \\ P(B_2 \mid A_1) = \boxed{0.3} \\ P(B_3 \mid A_1) = \boxed{0.1} \end{cases}$$

evidence

事象Cの周辺確率
または観測

$$P(C_1)=1$$
$$P(C_2)=0$$

事象Bの事後確率

逆方向に計算

$$P(B_1 \mid A_1, C_1) = \frac{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1) + P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1) + P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)} = \frac{0.6 \times 4/7}{0.6 \times 4/7 + 0.3 \times 1/14 + 0.1 \times 5/14} = \frac{6}{7}$$

$$P(B_2 \mid A_1, C_1) = \frac{P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1) + P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1) + P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)} = \frac{0.3 \times 1/14}{0.6 \times 4/7 + 0.3 \times 1/14 + 0.1 \times 5/14} = \frac{3}{56}$$

$$P(B_3 \mid A_1, C_1) = \frac{P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1) + P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1) + P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)} = \frac{0.1 \times 5/14}{0.6 \times 4/7 + 0.3 \times 1/14 + 0.1 \times 5/14} = \frac{5}{56}$$

順方向に計算

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$P(A_1)=1$

$P(A_2)=0$

$$\begin{cases} P(B_1 \mid A_1) = \boxed{0.6} \\ P(B_2 \mid A_1) = \boxed{0.3} \\ P(B_3 \mid A_1) = \boxed{0.1} \end{cases}$$

事象Bの事後確率

$$P(B_1 \mid C_1) = \frac{4}{7}$$

$$P(B_2 \mid C_1) = \frac{1}{14}$$

$$P(B_3 \mid C_1) = \frac{5}{14}$$

evidence

事象Cの周辺確率
または観測

$P(C_1)=1$

$P(C_2)=0$

逆方向に計算

$$P(B_1 \mid A_1, C_1) = \frac{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)+P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)+P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)} = \frac{0.6\times {}^{4}\!/_{7}}{0.6\times {}^{4}\!/_{7}+0.3\times {}^{1}\!/_{14}+0.1\times {}^{5}\!/_{14}} = \frac{6}{7}$$

$$P(B_2 \mid A_1, C_1) = \frac{P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)+P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)+P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)} = \frac{0.3\times {}^{1}\!/_{14}}{0.6\times {}^{4}\!/_{7}+0.3\times {}^{1}\!/_{14}+0.1\times {}^{5}\!/_{14}} = \frac{3}{56}$$

$$P(B_3 \mid A_1, C_1) = \frac{P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(B_1 \mid C_1)+P(B_2 \mid A_1)P(B_2 \mid C_1)+P(B_3 \mid A_1)P(B_3 \mid C_1)} = \frac{0.1\times {}^{5}\!/_{14}}{0.6\times {}^{4}\!/_{7}+0.3\times {}^{1}\!/_{14}+0.1\times {}^{5}\!/_{14}} = \frac{5}{56}$$

【演習問題】　2018.04.17　学籍番号　　　　氏名

ある飲酒運転の検挙用の簡易アルコールセンサーで検査を行うと、
・飲酒を行っている人についてアルコールを検出する確率は０．８
（飲酒を行っているのにアルコールを検出できない確率が０．２）
・飲酒していないにもかかわらずアルコールを検出してしまう確率が０．３
（飲酒していない人についてアルコールを検出しない確率が０．７）
であるものとする。
このとき、

ヒント：事前確率が未知
$P(A_1) = P(A_2) = 0.5$

原因となる事象
A1：　飲酒している
A2：　飲酒していない

$P(B_1 \mid A_1) = 0.8$
$P(B_2 \mid A_1) = 0.2$
$P(B_1 \mid A_2) = 0.3$
$P(B_2 \mid A_2) = 0.7$

結果となる事象
B1：　アルコール反応あり
B2：　アルコール反応なし

1）　事前分布が未知の被験者において、上記センサによりアルコール反応が出た。
この被験者が飲酒をしている確率、および飲酒をしていない確率をそれぞれ求めよ。

2）　車種や検挙暦などから、飲酒運転をしているとは考えにくい被験者については、
飲酒の事前確率が０．２であるとする。この被験者から上記センサのアルコール
反応があったとき、飲酒している確率を求めよ。

【演習問題】　　　　　　　　　　　　　　学籍番号　　　　　　　　氏名

ある飲酒運転の検挙用の簡易アルコールセンサーで検査を行うと、
・飲酒を行っている人についてアルコールを検出する確率は０．８
（飲酒を行っているのにアルコールを検出できない確率が０．２）
・飲酒していないにもかかわらずアルコールを検出してしまう確率が０．３
（飲酒していない人についてアルコールを検出しない確率が０．７）
であるものとする。
このとき、

ヒント：事前確率が未知
$P(A_1) = P(A_2) = 0.5$

原因となる事象
Ａ１：　飲酒している
Ａ２：　飲酒していない

$P(B_1 | A_1) = 0.8$
$P(B_2 | A_1) = 0.2$
$P(B_1 | A_2) = 0.3$
$P(B_2 | A_2) = 0.7$

結果となる事象
Ｂ１：　アルコール反応あり
Ｂ２：　アルコール反応なし

１）　事前分布が未知の被験者において、上記センサによりアルコール反応が出た。
　　この被験者が飲酒をしている確率、および飲酒をしていない確率をそれぞれ求めよ。

事前確率＝0.5

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_1 | A_i)} =$$

事後確率

$$P(A_2 | B_1) = \frac{P(A_2)P(B_1 | A_2)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_1 | A_i)} =$$

事後確率

２）　車種や検挙暦などから、飲酒運転をしているとは考えにくい被験者については、
　　飲酒の事前確率が０．２であるとする。この被験者から上記センサのアルコール
　　反応があったとき、飲酒している確率を求めよ。

【演習問題】　　　　　　　　　　　　学籍番号　　　　　　　　氏名

ある飲酒運転の検挙用の簡易アルコールセンサーで検査を行うと、
・飲酒を行っている人についてアルコールを検出する確率は0．8
（飲酒を行っているのにアルコールを検出できない確率が0．2）
・飲酒していないにもかかわらずアルコールを検出してしまう確率が0．3
（飲酒していない人についてアルコールを検出しない確率が0．7）
であるものとする。
このとき、

原因となる事象
A1：　飲酒している
A2：　飲酒していない

$P(B_1 | A_1) = 0.8$
$P(B_2 | A_1) = 0.2$
$P(B_1 | A_2) = 0.3$
$P(B_2 | A_2) = 0.7$

結果となる事象
B1：　アルコール反応あり
B2：　アルコール反応なし

1）　事前分布が未知の被験者において、上記センサによりアルコール反応が出た。
この被験者が飲酒をしている確率、および飲酒をしていない確率をそれぞれ求めよ。

事前確率＝0.5

$$\underbrace{P(A_1 | B_1)}_{\text{事後確率}} = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_1 | A_i)} = \frac{0.5 \cdot 0.8}{0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.3} = \frac{8}{11}$$

$$P(A_2 | B_1) = \frac{P(A_2)P(B_1 | A_2)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_1 | A_i)} = \frac{3}{11}$$

2）　車種や検挙暦などから、飲酒運転をしているとは考えにくい被験者については、
飲酒の事前確率が0．2であるとする。この被験者から上記センサのアルコール反応があったとき、飲酒している確率を求めよ。

事前確率＝0.2

$$\underbrace{P(A_1 | B_1)}_{\text{事後確率}} = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_1 | A_i)} = \frac{0.2 \cdot 0.8}{0.2 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.3} = \frac{2}{5}$$

事前確率＝0.2, 0.8