

九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

海事統計学 第3回 (担当:木村)

確率論の基礎1

(事象と標本空間・条件付き確率)

場所: 船2講義室

授業の資料等は

<http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html>

事象と確率

コルモゴロフの公理

- ・**試行**: その結果が偶然に支配されているような実験や観測
- ・**事象**: 試行の結果として起こりうる事柄
- ・各事象には、**確率**が付与される

- 【確率の公理1】 どのような事象 A に対しても、その確率 $P(A)$ は 0 と 1 の間の値をとる。
すなわち $0 \leq P(A) \leq 1$
- 【確率の公理2】 あらゆる可能な事象全体の集合を S とすれば、 S の確率は 1 である。
すなわち $P(S) = 1$
- 【確率の公理3】 同時には起こりえない(これを互いに排反という)有限個あるいは無限個だが番号が付けられる事象を A_1, A_2, A_3, \dots とするとき、 A_1, A_2, A_3, \dots のいずれかがおこる確率は、それぞれの事象が起こる確率の和に等しい
すなわち $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

例) サイコロを1回振る

「1の目が出る」事象の確率 $1/6$

「2の目が出る」事象の確率 $1/6$

「4以上の目が出る」事象の確率 $3/6 = 1/2$

- ・ある事象 A が起こらないこと、すなわち A ではない事象のことを A の \bar{A} と呼ぶ

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

事象と確率

コルモゴロフの公理

- ・**試行**: その結果が偶然に支配されているような実験や観測
- ・**事象**: 試行の結果として起こりうる事柄
- ・各事象には、**確率**が付与される

- 【確率の公理1】 どのような事象 A に対しても、その確率 $P(A)$ は 0 と 1 の間の値をとる。
すなわち $0 \leq P(A) \leq 1$
- 【確率の公理2】 あらゆる可能な事象全体の集合を S とすれば、 S の確率は 1 である。
すなわち $P(S) = 1$
- 【確率の公理3】 同時には起こりえない(これを互いに排反という)有限個あるいは無限個だが番号が付けられる事象を A_1, A_2, A_3, \dots とするとき、 A_1, A_2, A_3, \dots のいずれかがおこる確率は、それぞれの事象が起こる確率の和に等しい
すなわち $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

例) サイコロを1回振る

「1の目が出る」事象の確率 $1/6$

「2の目が出る」事象の確率 $1/6$

「4以上の目が出る」事象の確率 $3/6 = 1/2$

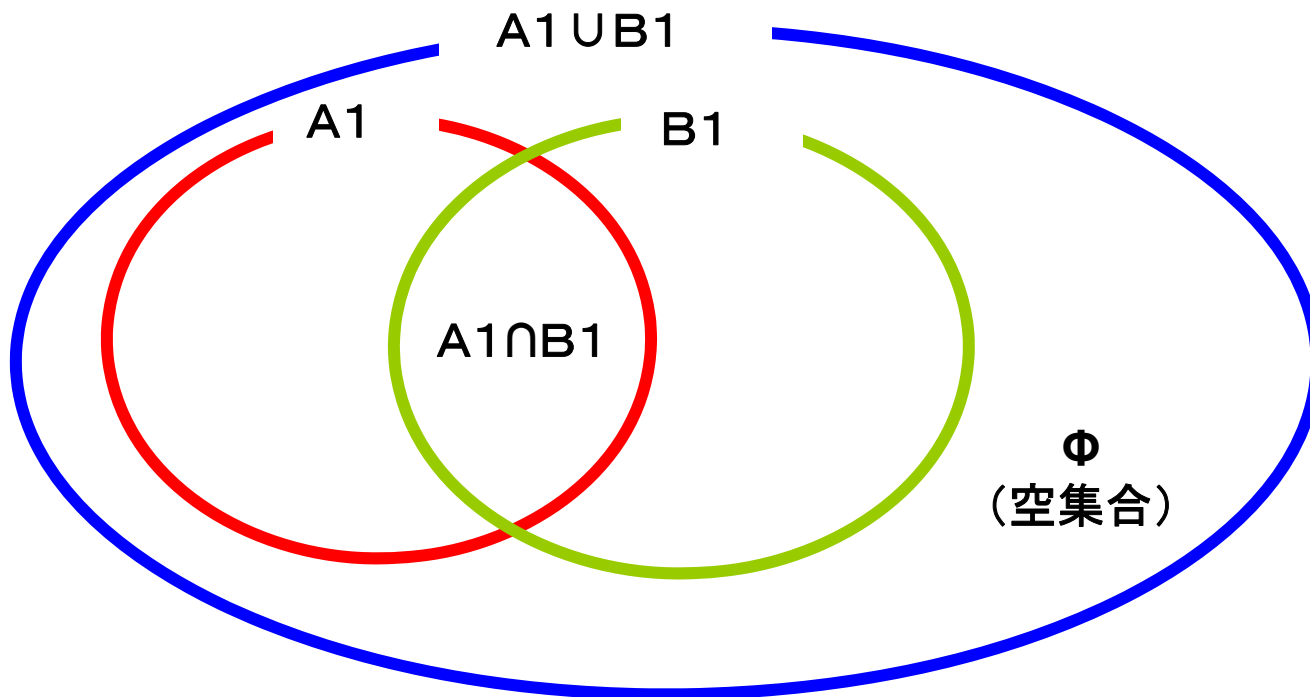
- ・ある事象 A が起こらないこと、すなわち A ではない事象のことを A の **余事象** \bar{A} と呼ぶ

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

加法定理

- ・事象 A_1 の起きる確率 $P(A_1)$
- ・事象 B_1 の起きる確率 $P(B_1)$
- ・事象 A_1 および B_1 のうち少なくともそのどちらか1つが起こる事象 $A_1 \cup B_1$
および事象 $A_1 \cup B_1$ の起こる確率 $P(A_1 \cup B_1)$
- ・事象 A_1 および B_1 が同時に起こる事象 $A_1 \cap B_1$
および事象 $A_1 \cap B_1$ が起こる確率 $P(A_1 \cap B_1)$

このとき



例) サイコロ
事象A 5の目
事象B 3以上の目

事象 $A \cup B$
 $= \{3, 4, 5, 6\}$

事象 $A \cap B$
 $= \{5\}$

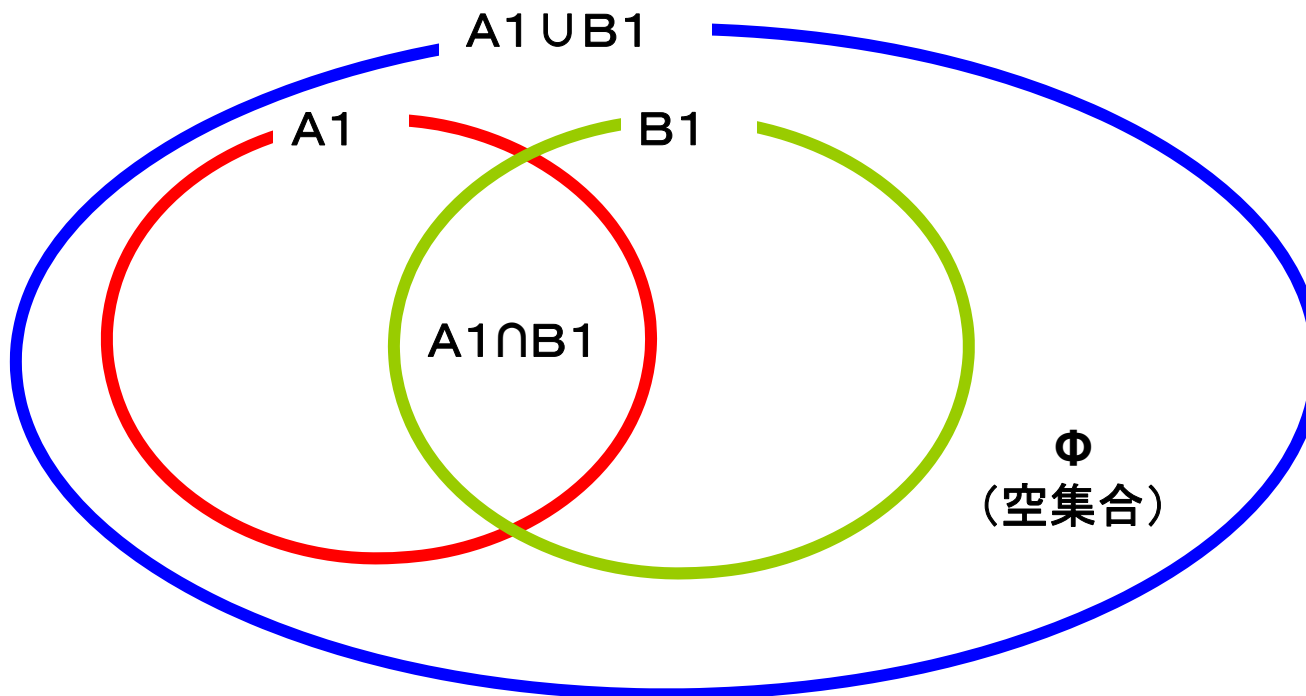
加法定理

- ・事象 A1 の起きる確率 $P(A1)$
- ・事象 B1 の起きる確率 $P(B1)$
- ・事象 A1 および B1 のうち少なくともそのどちらか1つが起こる事象 $A1 \cup B1$
および事象 $A1 \cup B1$ の起こる確率 $P(A1 \cup B1)$
- ・事象 A1 および B1 が同時に起こる事象 $A1 \cap B1$
および事象 $A1 \cap B1$ が起こる確率 $P(A1 \cap B1)$

同時確率 (joint probability)

このとき

$$P(A1 \cup B1) = P(A1) + P(B1) - P(A1 \cap B1)$$



例) サイコロ
事象A 5の目
事象B 3以上の目

事象 $A \cup B$
 $= \{3, 4, 5, 6\}$

事象 $A \cap B$
 $= \{5\}$

【練習問題1】

3個のサイコロを同時に投げたとき、少なくともどれか1つは1の目が出る確率を求めよ。
(ヒント: 全てのサイコロが1以外の目になる事象をAとおき、余事象を考えよ)

【練習問題2】

カード100枚にそれぞれ1から100までの番号が書かれている。この中からランダムに1枚のカードを引くとき、そのカードの番号が2または3の倍数である確率を求めよ。
(ヒント: 加法定理を利用する)

【練習問題1】

3個のサイコロを同時に投げたとき、少なくともどれか1つは1の目が出る確率を求めよ。
(ヒント: 全てのサイコロが1以外の目になる事象をAとおき、余事象を考えよ)

$$\text{事象Aの確率は、} \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

事象 A と、その余事象 \bar{A} との関係は $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ であるから

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

【練習問題2】

カード100枚にそれぞれ1から100までの番号が書かれている。この中からランダムに1枚のカードを引くとき、そのカードの番号が2または3の倍数である確率を求めよ。
(ヒント: 加法定理を利用する)

事象A: カードが2の倍数 $P(A) = \frac{50}{100}$

事象B: カードが3の倍数 $P(B) = \frac{33}{100}$

事象A∩B: カードが6の倍数 $P(A \cap B) = \frac{16}{100}$

よって

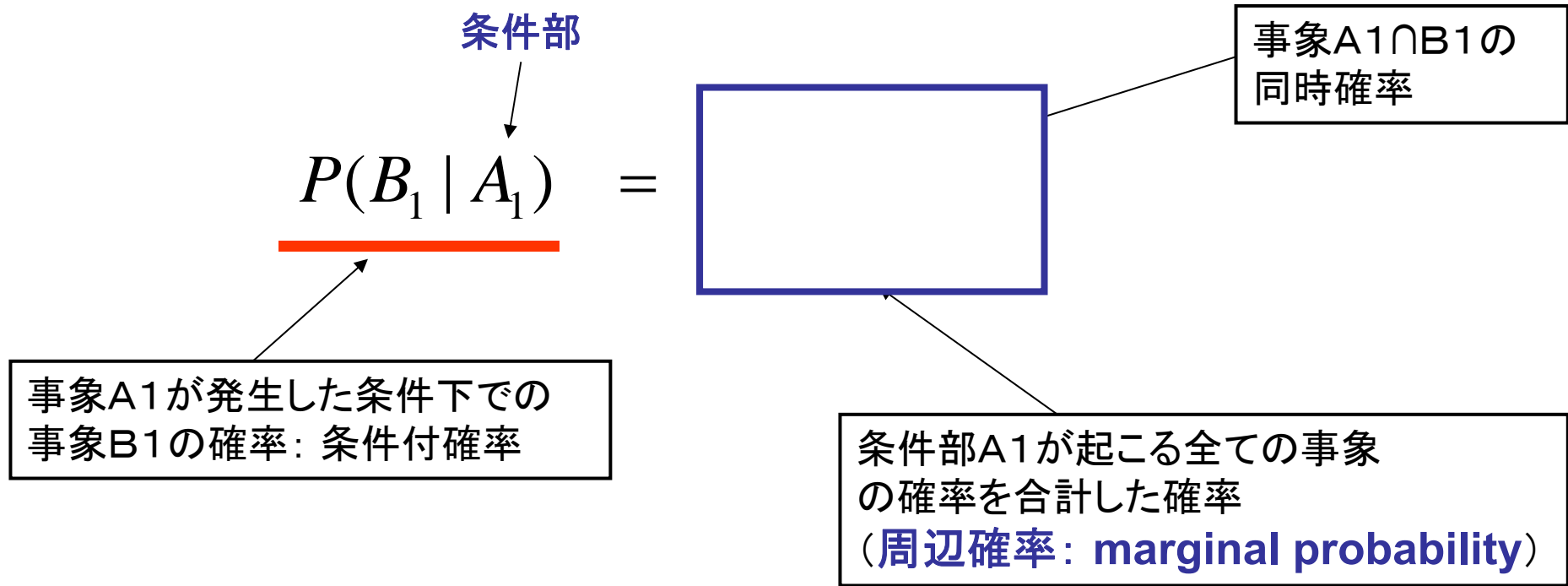
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100}$$

$$= \frac{67}{100}$$

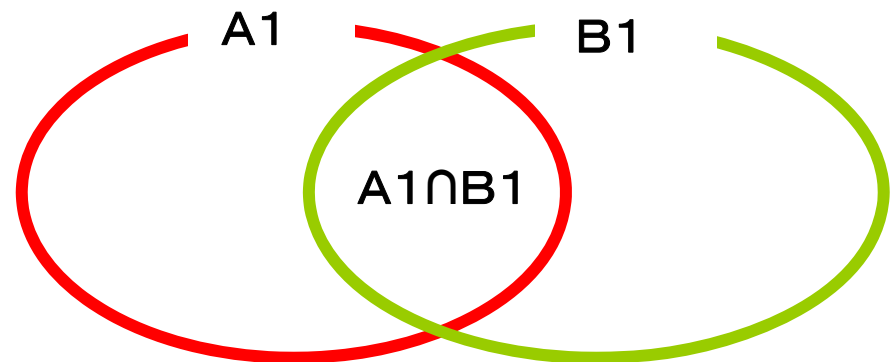
条件付き確率 (conditional probability)

事象 A1 と B1 が考えられるとき、事象 A1 が起こったという条件の下では事象 B1 の確率はどうか



事象 A1 が発生したら、新たな標本空間は事象 A1 を占める領域に限定される

→ 確率の値もその領域に合わせて比例配分



条件付き確率 (conditional probability)

事象 A1 と B1 が考えられるとき、事象 A1 が起こったという条件の下では事象 B1 の確率はどうか

条件部

$P(B_1 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)}$

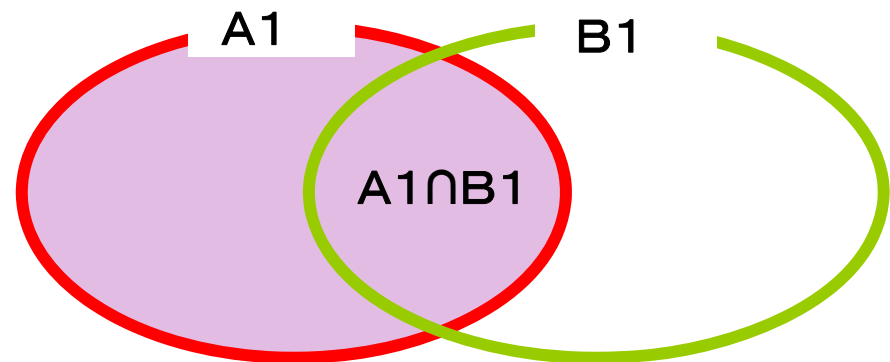
事象A1が発生した条件下での事象B1の確率：条件付確率

事象A1∩B1の同時確率

条件部A1が起こる全ての事象の確率を合計した確率 (周辺確率: **marginal probability**)

事象A1が発生したら、新たな標本空間は事象A1を占める領域に限定される

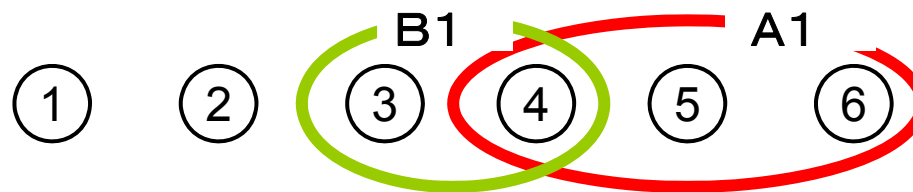
→ 確率の値もその領域に合わせて比例配分



例1) サイコロ

事象A1 4以上の目

事象B1 3または4の目が出る



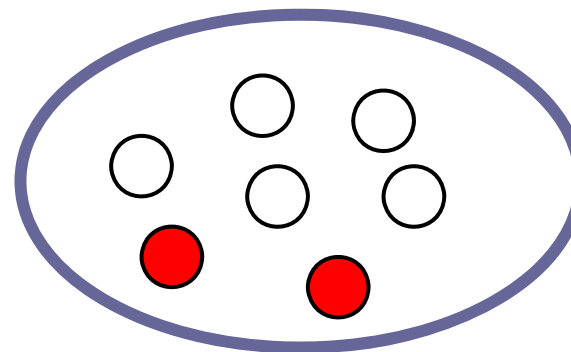
$$P(B_1 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} =$$

例2) 袋に赤球が2個、白球が5個入っている。

袋からランダムに1個取り出して何色かを調べた後、取り出した球をもとに戻さずにもう一度球をランダムに取り出す。

事象A1: 1回目で赤を取り出す

事象B1: 2回目で赤を取り出す

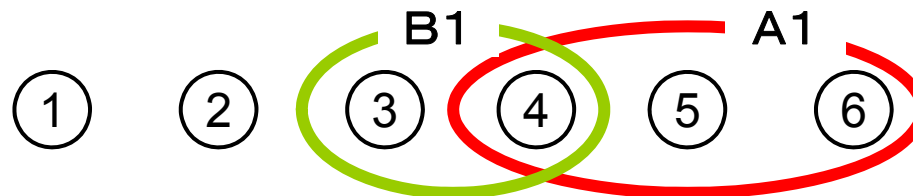


$$P(B_1 | A_1) =$$

例1) サイコロ

事象A1 4以上の目

事象B1 3または4の目が出る



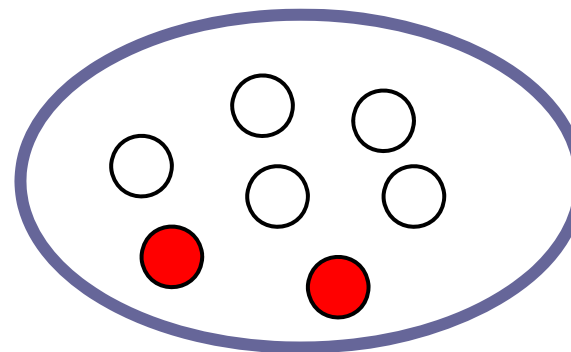
$$P(B_1 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

例2) 袋に赤球が2個、白球が5個入っている。

袋からランダムに1個取り出して何色かを調べた後、取り出した球をもとに戻さずにもう一度球をランダムに取り出す。

事象A1: 1回目で赤を取り出す

事象B1: 2回目で赤を取り出す

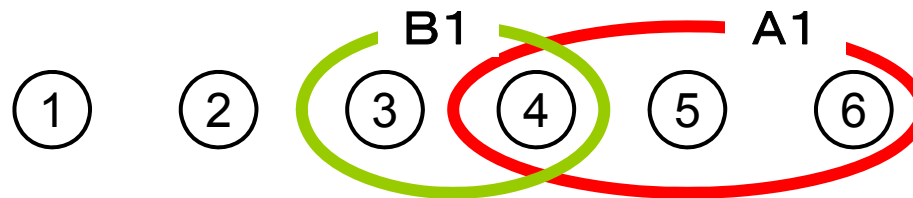


$$P(B_1 | A_1) =$$

例1) サイコロ

事象A1 4以上の目

事象B1 3または4の目が出る



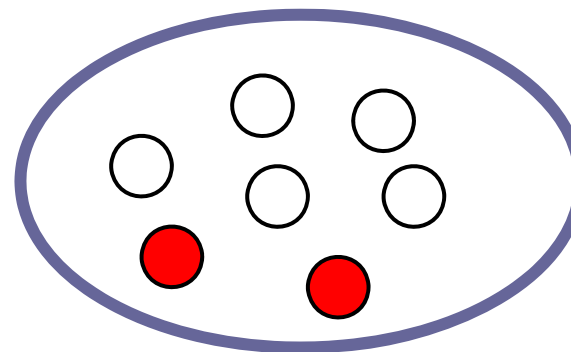
$$P(B_1 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

例2) 袋に赤球が2個、白球が5個入っている。

袋からランダムに1個取り出して何色かを調べた後、取り出した球をもとに戻さずにもう一度球をランダムに取り出す。

事象A1: 1回目で赤を取り出す

事象B1: 2回目で赤を取り出す



$$P(B_1 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{2}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{6}$$

【練習問題】 倍掛け賭博(マルチンゲールの必勝法)

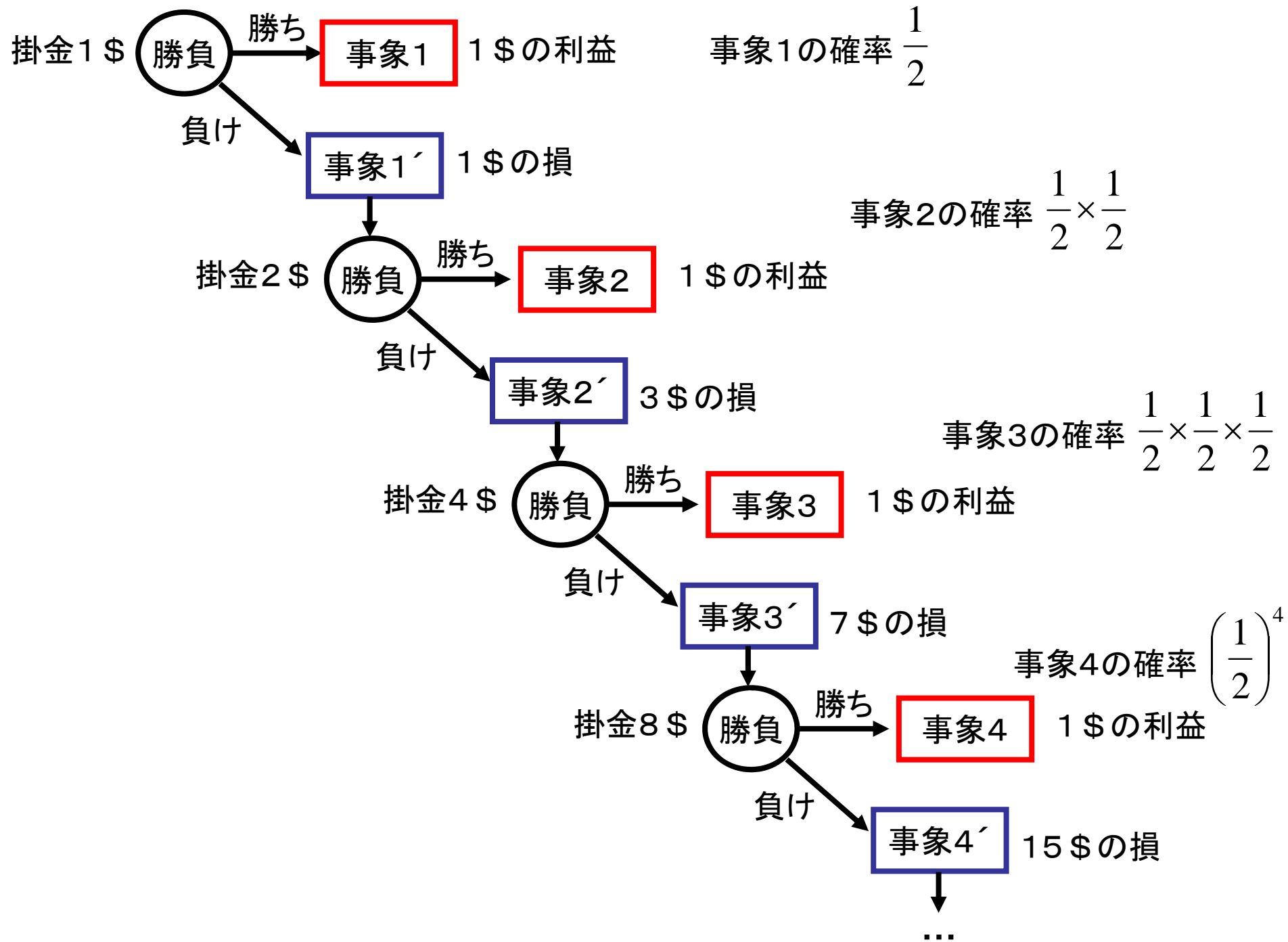
1回あたりの勝率が2分の1で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される賭博において、以下のような戦略でプレイする:

- ・最大で10回まで勝負する。且つ
- ・1回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
- ・最初は1 \$を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

このとき、

- 1) プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

- 2) 現在、5回ほど勝負に負けている状況にあるとする。
このとき、プレイの結果持ち金がプラスになる確率を求めよ。



【練習問題】 倍掛け賭博(マルチンゲールの必勝法)

1回あたりの勝率が2分の1で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される賭博において、以下のような戦略でプレイする:

- ・最大で10回まで勝負する。且つ
- ・1回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
- ・最初は1 \$を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

勝てば必ずプラス

負ける事象の確率
を考えて1から引く

このとき、

1) プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024} = 0.999$$

2) 現在、5回ほど勝負に負けている状況にあるとする。
このとき、プレイの結果持ち金がプラスになる確率を求めよ。

【練習問題】 倍掛け賭博(マルチンゲールの必勝法)

1回あたりの勝率が2分の1で、勝つと掛金の倍が戻り、負けると掛金が没収される賭博において、以下のような戦略でプレイする:

- ・最大で10回まで勝負する。且つ
- ・1回でも勝ったらそこで勝負を止める。且つ
- ・最初は1 \$を掛け、負けるたびに掛金を倍に増やす。

勝てば必ずプラス

負ける事象の確率
を考えて1から引く

このとき、

1) プレイの結果、持ち金がプラスになる確率を求めよ。

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024} = 0.999$$

2) 現在、5回ほど勝負に負けている状況にあるとする。

このとき、プレイの結果持ち金がプラスになる確率を求めよ。

事象A1: 5回負ける

$$P(A_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

事象A2: 持ち金がプラス

$$P(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right)$$

事象A2が起きた
という条件付確率
を考える

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{31}{32}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{31}{32}$$

条件付き確率と独立性

$$P(B_1 | A_1) = P(B_1)$$

または $P(A_1 | B_1) = P(A_1)$

であるとき、事象A1とB1は であるという

事象A1とB1が であるとき、 $A_1 \cap B_1$ の確率(同時確率)は

$$P(A_1 \cap B_1) =$$

例) コインAとBを同時に投げる

事象A1 コインAが表

事象B1 コインBが表



コインAもコインBも、裏表の出方は互いに無関係

条件付き確率と独立性

$$P(B_1 | A_1) = P(B_1)$$

または $P(A_1 | B_1) = P(A_1)$

であるとき、事象A1とB1は **独立 (independent)** であるという

事象A1とB1が独立であるとき、 $A_1 \cap B_1$ の確率(同時確率)は

$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)P(B_1)$$

例) コインAとBを同時に投げる

事象A1 コインAが表

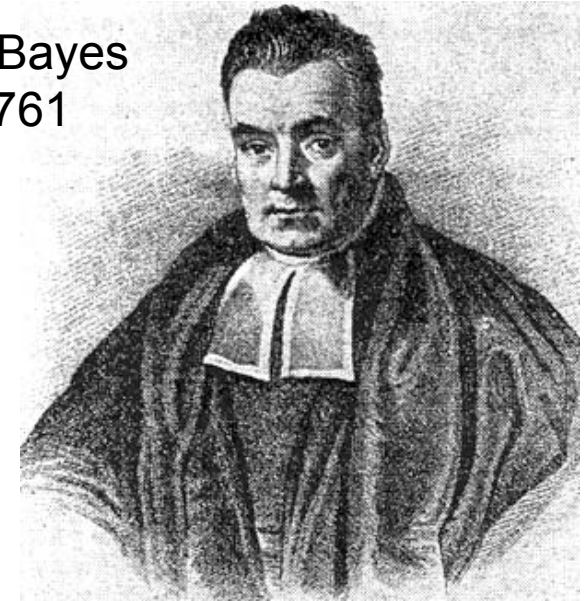
事象B1 コインBが表



コインAもコインBも、裏表の出方は互いに無関係

ベイズ (Bayes) の定理

Thomas Bayes
1702–1761



例) ある病院で腫瘍検査を受ける人について、
ガンである人の割合 1000人中5人
ガンの人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.95
ガンではない人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.055

ある患者が腫瘍マーカで検査したところ陽性だった
この患者がガンである確率は？

原因となる事象
A1: 患者がガン
A2: 患者が非ガン

結果となる事象
B1: 検査が陽性
B2: 検査が陰性

求める確率は

$$P(A_1 | B_1)$$

$$P(A_2 | B_1)$$

事象B1が起こった後の
条件付確率という意味で

ガン患者の割合より

$$P(A_1) = \square$$
$$P(A_2) = \square$$

事象Bが観測される前の
周辺確率という意味で

腫瘍マーカの性能より

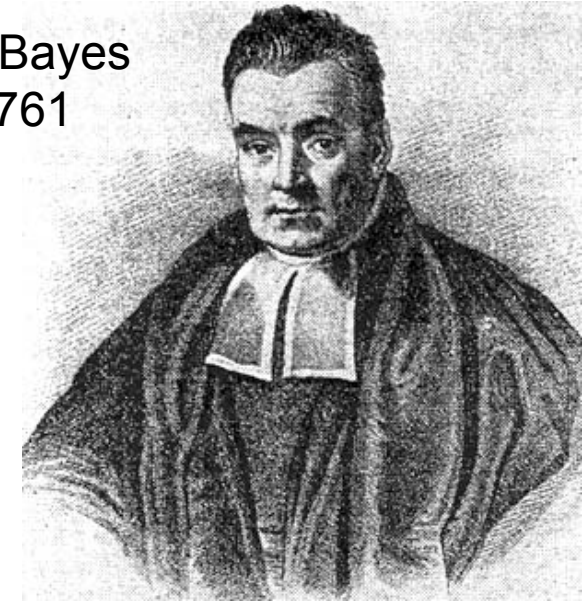
$$P(B_1 | A_1) = \square$$
$$P(B_1 | A_2) = \square$$

もっともらしさを表す

条件付確率: **尤度** (likelihood)

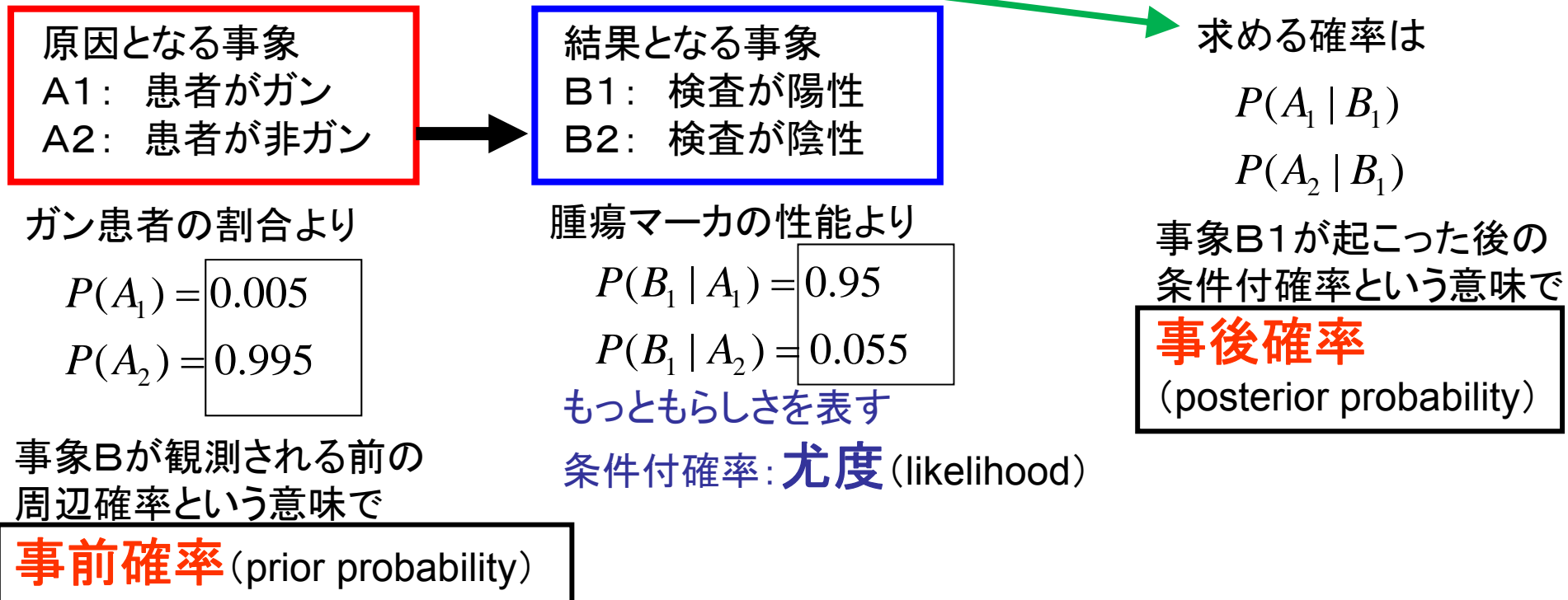
ベイズ (Bayes) の定理

Thomas Bayes
1702–1761



例) ある病院で腫瘍検査を受ける人について、
ガンである人の割合 1000人中5人
ガンの人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.95
ガンではない人が腫瘍マーカで陽性が出る確率 0.055

ある患者が腫瘍マーカで検査したところ陽性だった
この患者がガンである確率は？



ベイズ (Bayes) の定理

例題に沿って説明すると

条件付確率の公式より

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_1)}$$

事後確率

マーカ陽性の条件下で
患者がガンである確率

事前確率

尤度

患者がガンで且つ
マーカで陽性になる確率

$$0.005 \times 0.95$$

$$= \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{P(A_1)P(B_1 | A_1) + P(A_2)P(B_1 | A_2)} = \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.055}$$

事前確率

尤度

患者がガンで、且つ
マーカで陽性になる確率

患者が非ガンで、且つ
マーカが陽性になる確率

事後の確率が事前確率と尤度で表される

$$= 0.080$$

ベイズ (Bayes) の定理

もっと一般的に書くと

条件付確率の公式より

事後確率

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)}$$

事前確率

尤度

$$= \frac{P(A_k)P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)}$$

条件部の事象Bが起こる全ての事象の確率を合計した確率
(周辺確率)

尤度

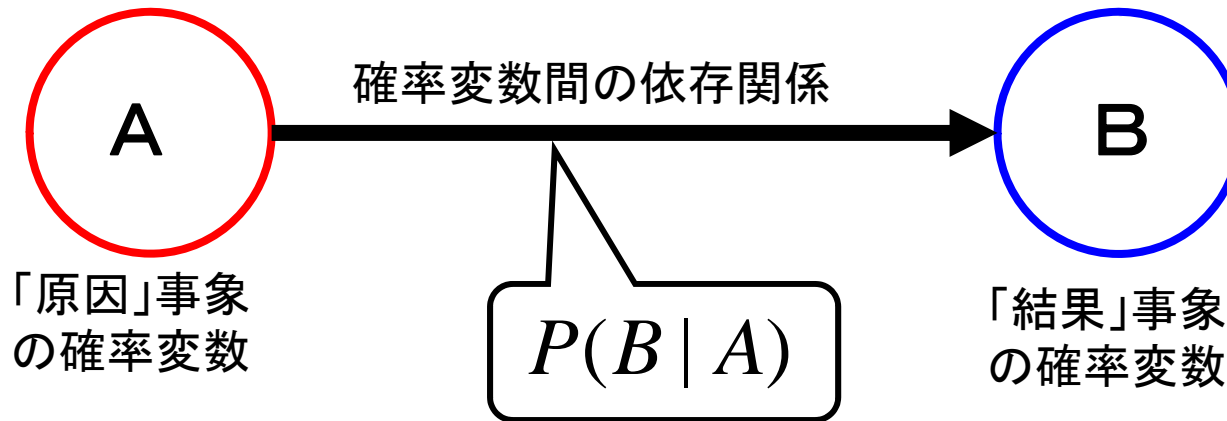
事前確率

事後の確率が事前確率と尤度で表される

サイコロの例題(4以上の目が出る事象A1、3以下の目が出る事象A2、3または4の目が出る事象B1、3と4以外の目が出る事象B2)とした場合について計算すると分かりやすい

ベイジアンネットワーク (Bayesian network)

確率変数間の依存関係をグラフィカルに表現



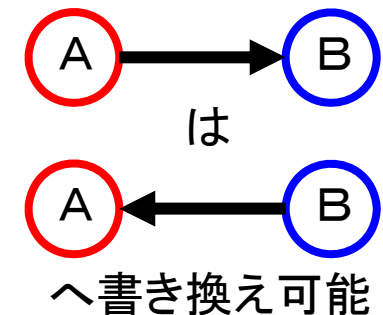
知りたい事象が観測できなくても、関連する事象の観測結果より、
知りたい事象の状態(変数の値)をより正確に推定できる。

ベイズの定理より

$$P(A_k | B) = \frac{\overset{\text{事前確率}}{P(A_k)} \overset{\text{尤度}}{P(B | A_k)}}{\sum_{i=1}^n \underset{\text{事前確率}}{P(A_i)} \underset{\text{尤度}}{P(B | A_i)}}$$

Aの事前分布が不明の場合、
一様分布(全て等確率)として与える

$$\rightarrow = \frac{P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i)}$$



ベイジアンネットワーク (Bayesian network)

ベイズの定理
での例題

直接観測できない

原因となる事象
A1: 患者がガン
A2: 患者が非ガン

結果となる事象
B1: 検査が陽性
B2: 検査が陰性

ガン患者の割合より

事前確率

$$P(A_1) = 0.005$$

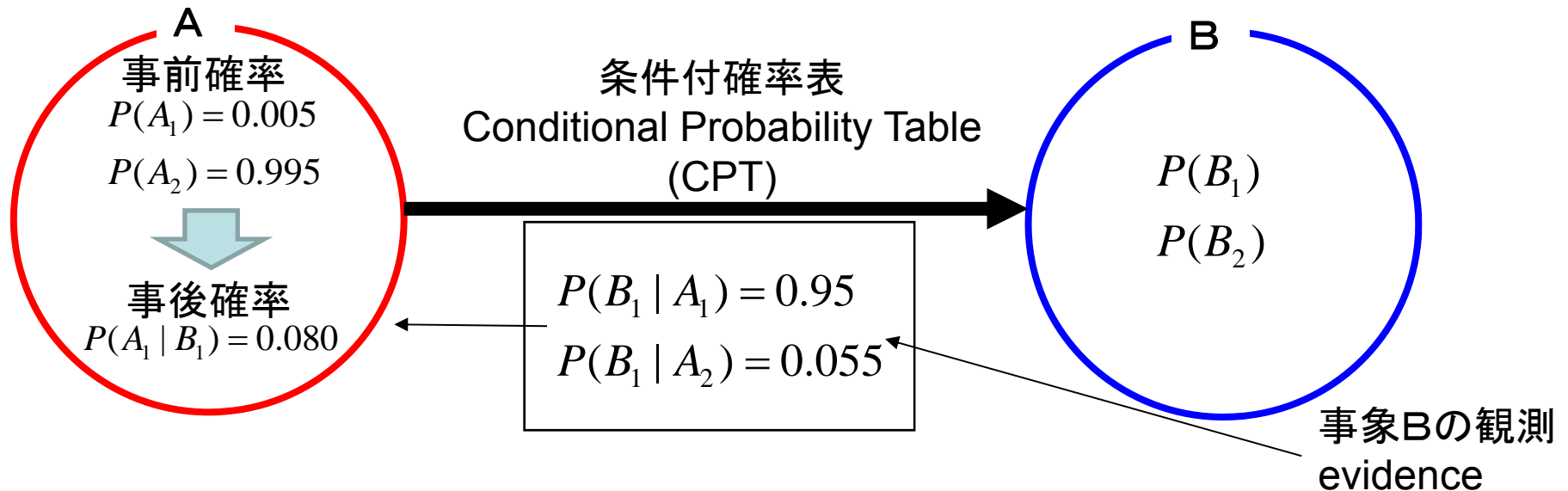
$$P(A_2) = 0.995$$

腫瘍マーカの性能より

尤度

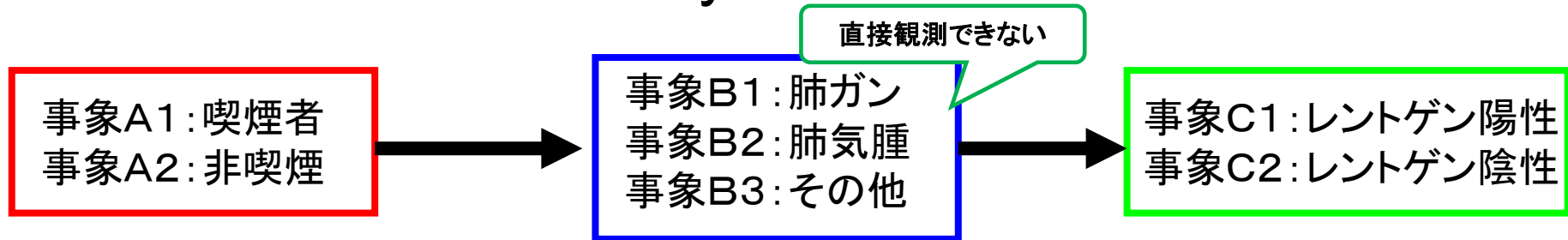
$$P(B_1 | A_1) = 0.95$$

$$P(B_1 | A_2) = 0.055$$



事象Bの観測結果よりCPTを通じてAの確率が更新された → belief の伝播

ベイジアンネットワーク (Bayesian network)



事象A1
のとき

$$\begin{cases} P(B_1 | A_1) = 0.6 \\ P(B_2 | A_1) = 0.3 \\ P(B_3 | A_1) = 0.1 \end{cases}$$

事象A2
のとき

$$\begin{cases} P(B_1 | A_2) = 0.3 \\ P(B_2 | A_2) = 0.3 \\ P(B_3 | A_2) = 0.4 \end{cases}$$

事象B1
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_1) = 0.8 \\ P(C_2 | B_1) = 0.2 \end{cases}$$

事象B2
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_2) = 0.1 \\ P(C_2 | B_2) = 0.9 \end{cases}$$

事象B3
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_3) = 0.5 \\ P(C_2 | B_3) = 0.5 \end{cases}$$

順方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1) = 1$$

$$P(A_2) = 0$$

事象Bの条件付確率

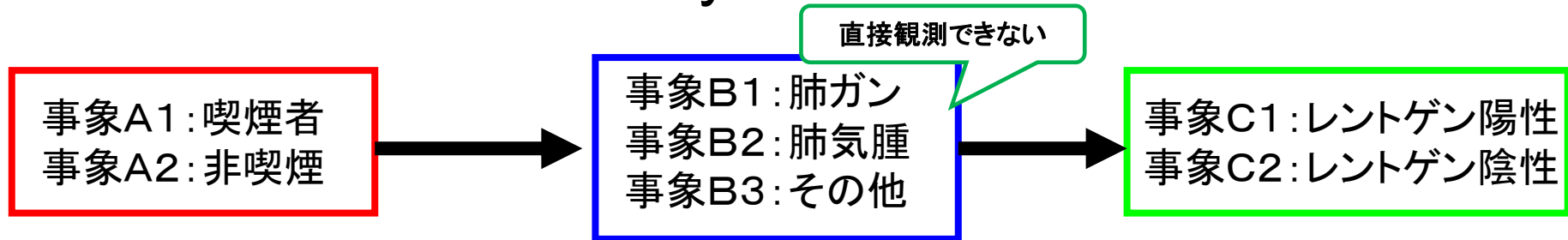


事象Cの条件付確率

$$P(C_1 | A_1)$$

$$P(C_2 | A_1)$$

ベイジアンネットワーク (Bayesian network)



事象A1
のとき

$$\begin{cases} P(B_1 | A_1) = 0.6 \\ P(B_2 | A_1) = 0.3 \\ P(B_3 | A_1) = 0.1 \end{cases}$$

事象A2
のとき

$$\begin{cases} P(B_1 | A_2) = 0.3 \\ P(B_2 | A_2) = 0.3 \\ P(B_3 | A_2) = 0.4 \end{cases}$$

事象B1
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_1) = 0.8 \\ P(C_2 | B_1) = 0.2 \end{cases}$$

事象B2
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_2) = 0.1 \\ P(C_2 | B_2) = 0.9 \end{cases}$$

事象B3
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_3) = 0.5 \\ P(C_2 | B_3) = 0.5 \end{cases}$$

順方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1) = 1$$

$$P(A_2) = 0$$

事象Bの条件付確率

$$P(B_1 | A_1) = 0.6$$

$$P(B_2 | A_1) = 0.3$$

$$P(B_3 | A_1) = 0.1$$

事象Cの条件付確率

$$P(C_1 | A_1)$$

$$P(C_2 | A_1)$$

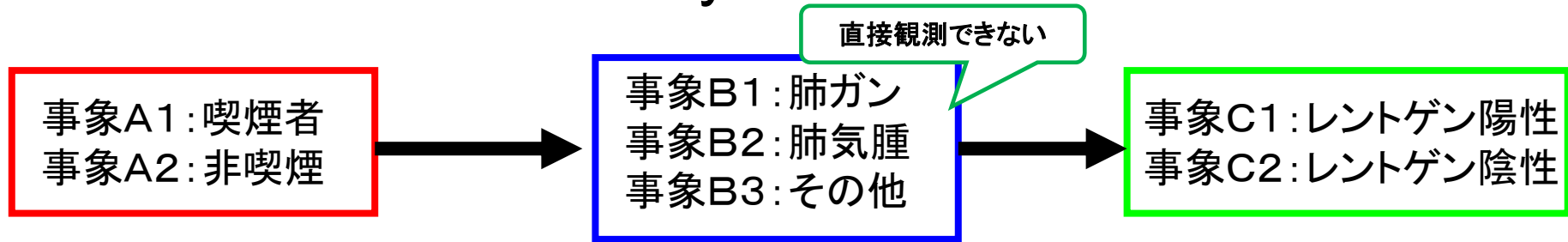
Bの条件付確率

Cの条件付確率

$$\begin{aligned}P(C_1 | A_1) &= P(B_1 | A_1)P(C_1 | B_1) + P(B_2 | A_1)P(C_1 | B_2) + P(B_3 | A_1)P(C_1 | B_3) \\ &= 0.6 \times 0.8 + 0.3 \times 0.1 + 0.1 \times 0.5 \\ &= 0.56\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(C_2 | A_1) &= P(B_1 | A_1)P(C_2 | B_1) + P(B_2 | A_1)P(C_2 | B_2) + P(B_3 | A_1)P(C_2 | B_3) \\ &= 0.6 \times 0.2 + 0.3 \times 0.9 + 0.1 \times 0.5 \\ &= 0.44\end{aligned}$$

ベイジアンネットワーク (Bayesian network)



事象A1
のとき

$$\begin{cases} P(B_1 | A_1) = 0.6 \\ P(B_2 | A_1) = 0.3 \\ P(B_3 | A_1) = 0.1 \end{cases}$$

事象A2
のとき

$$\begin{cases} P(B_1 | A_2) = 0.3 \\ P(B_2 | A_2) = 0.3 \\ P(B_3 | A_2) = 0.4 \end{cases}$$

事象B1
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_1) = 0.8 \\ P(C_2 | B_1) = 0.2 \end{cases}$$

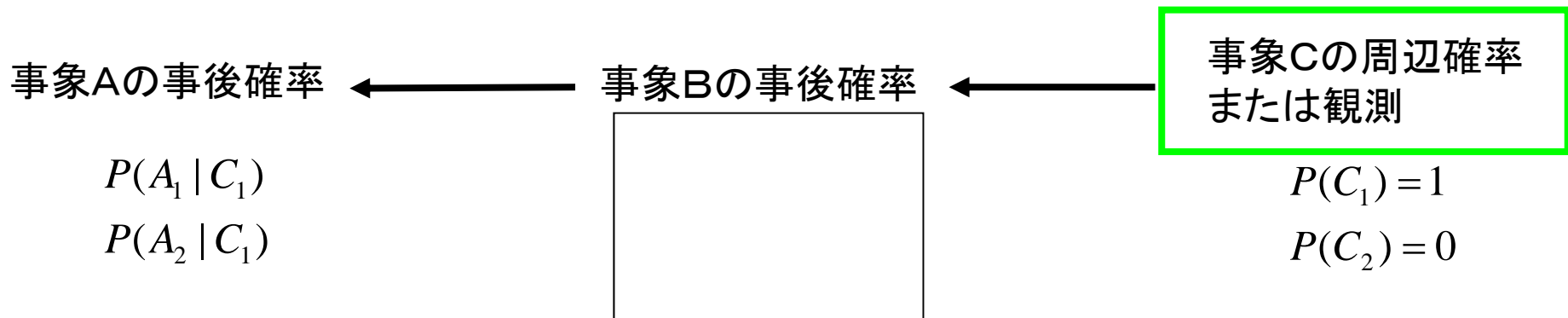
事象B2
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_2) = 0.1 \\ P(C_2 | B_2) = 0.9 \end{cases}$$

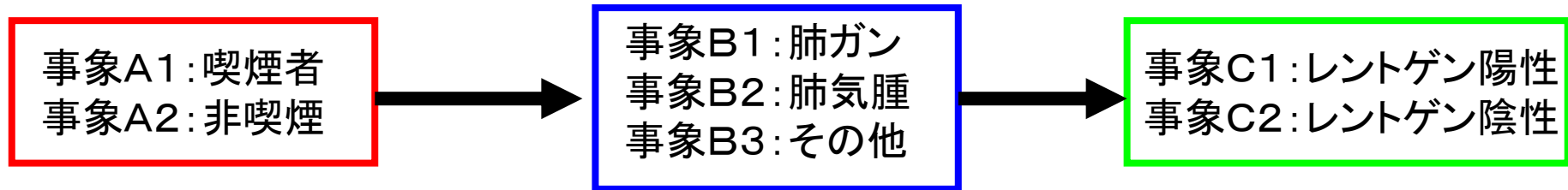
事象B3
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_3) = 0.5 \\ P(C_2 | B_3) = 0.5 \end{cases}$$

逆方向へ belief が伝播



ベイジアンネットワーク (Bayesian network)



事象A1
のとき

$$\begin{cases} P(B_1 | A_1) = 0.6 \\ P(B_2 | A_1) = 0.3 \\ P(B_3 | A_1) = 0.1 \end{cases}$$

事象A2
のとき

$$\begin{cases} P(B_1 | A_2) = 0.3 \\ P(B_2 | A_2) = 0.3 \\ P(B_3 | A_2) = 0.4 \end{cases}$$

事象B1
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_1) = 0.8 \\ P(C_2 | B_1) = 0.2 \end{cases}$$

事象B2
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_2) = 0.1 \\ P(C_2 | B_2) = 0.9 \end{cases}$$

事象B3
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_3) = 0.5 \\ P(C_2 | B_3) = 0.5 \end{cases}$$

逆方向へ belief が伝播

evidence

事象Aの事後確率

$$\begin{aligned} P(A_1 | C_1) \\ P(A_2 | C_1) \end{aligned}$$

事象Bの事後確率

$$\begin{aligned} P(B_1 | C_1) \\ P(B_2 | C_1) \\ P(B_3 | C_1) \end{aligned}$$

事象Cの周辺確率
または観測

$$\begin{aligned} P(C_1) = 1 \\ P(C_2) = 0 \end{aligned}$$

ベイズの定理より

事前確率が不明の場合
一様分布にしておく

$$\begin{aligned} P(B_1 | C_1) &= \frac{P(B_1)P(C_1 | B_1)}{P(B_1)P(C_1 | B_1) + P(B_2)P(C_1 | B_2) + P(B_3)P(C_1 | B_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 0.8}{\frac{1}{3} \times 0.8 + \frac{1}{3} \times 0.1 + \frac{1}{3} \times 0.5} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2 | C_1) &= \frac{P(B_2)P(C_1 | B_2)}{P(B_1)P(C_1 | B_1) + P(B_2)P(C_1 | B_2) + P(B_3)P(C_1 | B_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 0.1}{\frac{1}{3} \times 0.8 + \frac{1}{3} \times 0.1 + \frac{1}{3} \times 0.5} = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_3 | C_1) &= \frac{P(B_3)P(C_1 | B_3)}{P(B_1)P(C_1 | B_1) + P(B_2)P(C_1 | B_2) + P(B_3)P(C_1 | B_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 0.5}{\frac{1}{3} \times 0.8 + \frac{1}{3} \times 0.1 + \frac{1}{3} \times 0.5} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

ベイズの定理より

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{P(A_1)P(B_1 | A_1) + P(A_2)P(B_1 | A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.6}{\frac{1}{2} \times 0.6 + \frac{1}{2} \times 0.3} = \frac{2}{3}$$
$$P(A_1 | B_2) = \frac{P(A_1)P(B_2 | A_1)}{P(A_1)P(B_2 | A_1) + P(A_2)P(B_2 | A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.3}{\frac{1}{2} \times 0.3 + \frac{1}{2} \times 0.3} = \frac{1}{2}$$
$$P(A_1 | B_3) = \frac{P(A_1)P(B_3 | A_1)}{P(A_1)P(B_3 | A_1) + P(A_2)P(B_3 | A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.1}{\frac{1}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.4} = \frac{1}{5}$$

よって

$$P(A_1 | C_1) = P(A_1 | B_1)P(B_1 | C_1) + P(A_1 | B_2)P(B_2 | C_1) + P(A_1 | B_3)P(B_3 | C_1)$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{14} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{14} = \frac{41}{84}$$

もし事象C2が観測された場合

ベイズの定理より

$$\begin{aligned} P(B_1 | C_2) &= \frac{P(B_1)P(C_2 | B_1)}{P(B_1)P(C_2 | B_1) + P(B_2)P(C_2 | B_2) + P(B_3)P(C_2 | B_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 0.2}{\frac{1}{3} \times 0.2 + \frac{1}{3} \times 0.9 + \frac{1}{3} \times 0.5} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2 | C_2) &= \frac{P(B_2)P(C_2 | B_2)}{P(B_1)P(C_2 | B_1) + P(B_2)P(C_2 | B_2) + P(B_3)P(C_2 | B_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 0.9}{\frac{1}{3} \times 0.2 + \frac{1}{3} \times 0.9 + \frac{1}{3} \times 0.5} = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_3 | C_2) &= \frac{P(B_3)P(C_2 | B_3)}{P(B_1)P(C_2 | B_1) + P(B_2)P(C_2 | B_2) + P(B_3)P(C_2 | B_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times 0.5}{\frac{1}{3} \times 0.2 + \frac{1}{3} \times 0.9 + \frac{1}{3} \times 0.5} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

もし事象C2が観測された場合

事前確率が不明の場合
一様分布にしておく

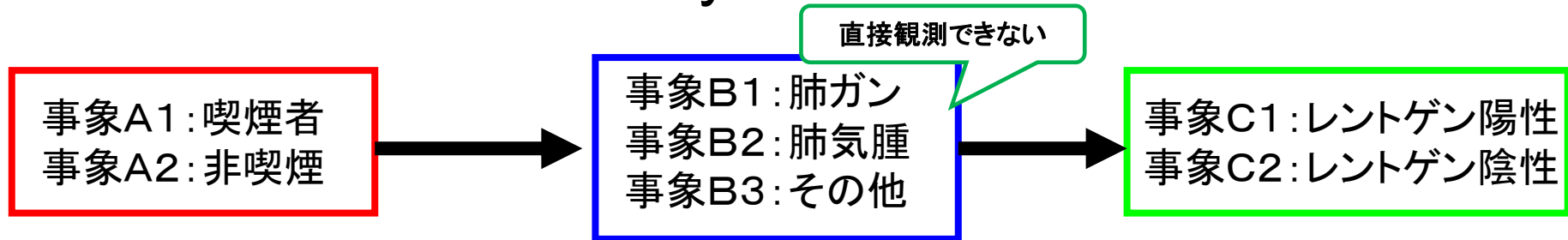
ベイズの定理より

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{P(A_1)P(B_1 | A_1) + P(A_2)P(B_1 | A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.6}{\frac{1}{2} \times 0.6 + \frac{1}{2} \times 0.3} = \frac{2}{3}$$
$$P(A_1 | B_2) = \frac{P(A_1)P(B_2 | A_1)}{P(A_1)P(B_2 | A_1) + P(A_2)P(B_2 | A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.3}{\frac{1}{2} \times 0.3 + \frac{1}{2} \times 0.3} = \frac{1}{2}$$
$$P(A_1 | B_3) = \frac{P(A_1)P(B_3 | A_1)}{P(A_1)P(B_3 | A_1) + P(A_2)P(B_3 | A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.1}{\frac{1}{2} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.4} = \frac{1}{5}$$

よって

$$P(A_1 | C_2) = P(A_1 | B_1)P(B_1 | C_2) + P(A_1 | B_2)P(B_2 | C_2) + P(A_1 | B_3)P(B_3 | C_2)$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{16} = \frac{17}{24}$$

ベイジアンネットワーク (Bayesian network)



事象A1
のとき

$$\begin{cases} P(B_1 | A_1) = 0.6 \\ P(B_2 | A_1) = 0.3 \\ P(B_3 | A_1) = 0.1 \end{cases}$$

事象A2
のとき

$$\begin{cases} P(B_1 | A_2) = 0.3 \\ P(B_2 | A_2) = 0.3 \\ P(B_3 | A_2) = 0.4 \end{cases}$$

事象B1
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_1) = 0.8 \\ P(C_2 | B_1) = 0.2 \end{cases}$$

事象B2
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_2) = 0.1 \\ P(C_2 | B_2) = 0.9 \end{cases}$$

事象B3
のとき

$$\begin{cases} P(C_1 | B_3) = 0.5 \\ P(C_2 | B_3) = 0.5 \end{cases}$$

両方向から belief が伝播

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1) = 1$$

$$P(A_2) = 0$$

事象Bの確率
(信念: belief)

$$P(B_1 | A_i, C_i)$$

$$P(B_2 | A_i, C_i)$$

$$P(B_3 | A_i, C_i)$$

= 条件付確率

× 事後分布を計算して正規化

evidence

事象Cの周辺確率
または観測

$$P(C_1) = 1$$

$$P(C_2) = 0$$

順方向に計算

evidence

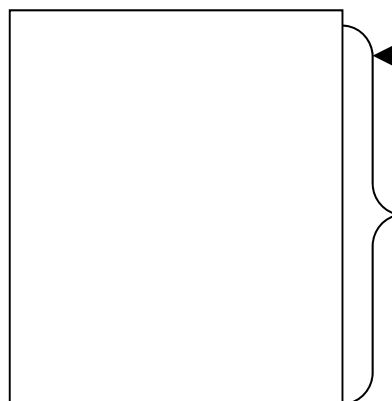
事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1) = 1$$

$$P(A_2) = 0$$

$$\begin{cases} P(B_1 | A_1) = \\ P(B_2 | A_1) = \\ P(B_3 | A_1) = \end{cases}$$

事象Bの事後確率



evidence

事象Cの周辺確率
または観測

$$P(C_1) = 1$$

$$P(C_2) = 0$$

逆方向に計算

$$P(B_1 | A_1, C_1) = \frac{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1)}{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1) + P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1) + P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)} = \frac{0.6 \times \frac{4}{7}}{0.6 \times \frac{4}{7} + 0.3 \times \frac{1}{14} + 0.1 \times \frac{5}{14}} = \frac{6}{7}$$

$$P(B_2 | A_1, C_1) = \frac{P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1)}{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1) + P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1) + P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)} = \frac{0.3 \times \frac{1}{14}}{0.6 \times \frac{4}{7} + 0.3 \times \frac{1}{14} + 0.1 \times \frac{5}{14}} = \frac{3}{56}$$

$$P(B_3 | A_1, C_1) = \frac{P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)}{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1) + P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1) + P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)} = \frac{0.1 \times \frac{5}{14}}{0.6 \times \frac{4}{7} + 0.3 \times \frac{1}{14} + 0.1 \times \frac{5}{14}} = \frac{5}{56}$$

順方向に計算

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1) = 1$$

$$P(A_2) = 0$$

$$\begin{cases} P(B_1 | A_1) = 0.6 \\ P(B_2 | A_1) = 0.3 \\ P(B_3 | A_1) = 0.1 \end{cases}$$

evidence

事象Cの周辺確率
または観測

$$P(C_1) = 1$$

$$P(C_2) = 0$$

事象Bの事後確率

逆方向に計算

$$P(B_1 | A_1, C_1) = \frac{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1)}{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1) + P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1) + P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)} = \frac{0.6 \times \frac{4}{7}}{0.6 \times \frac{4}{7} + 0.3 \times \frac{1}{14} + 0.1 \times \frac{5}{14}} = \frac{6}{7}$$

$$P(B_2 | A_1, C_1) = \frac{P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1)}{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1) + P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1) + P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)} = \frac{0.3 \times \frac{1}{14}}{0.6 \times \frac{4}{7} + 0.3 \times \frac{1}{14} + 0.1 \times \frac{5}{14}} = \frac{3}{56}$$

$$P(B_3 | A_1, C_1) = \frac{P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)}{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1) + P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1) + P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)} = \frac{0.1 \times \frac{5}{14}}{0.6 \times \frac{4}{7} + 0.3 \times \frac{1}{14} + 0.1 \times \frac{5}{14}} = \frac{5}{56}$$

順方向に計算

evidence

事象Aの事前確率
または観測

$$P(A_1) = 1$$

$$P(A_2) = 0$$

$$\begin{cases} P(B_1 | A_1) = 0.6 \\ P(B_2 | A_1) = 0.3 \\ P(B_3 | A_1) = 0.1 \end{cases}$$

evidence

事象Cの周辺確率
または観測

$$P(C_1) = 1$$

$$P(C_2) = 0$$

事象Bの事後確率

$$P(B_1 | C_1) = \frac{4}{7}$$

$$P(B_2 | C_1) = \frac{1}{14}$$

$$P(B_3 | C_1) = \frac{5}{14}$$

逆方向に計算

$$P(B_1 | A_1, C_1) = \frac{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1)}{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1) + P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1) + P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)} = \frac{0.6 \times \frac{4}{7}}{0.6 \times \frac{4}{7} + 0.3 \times \frac{1}{14} + 0.1 \times \frac{5}{14}} = \frac{6}{7}$$

$$P(B_2 | A_1, C_1) = \frac{P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1)}{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1) + P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1) + P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)} = \frac{0.3 \times \frac{1}{14}}{0.6 \times \frac{4}{7} + 0.3 \times \frac{1}{14} + 0.1 \times \frac{5}{14}} = \frac{3}{56}$$

$$P(B_3 | A_1, C_1) = \frac{P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)}{P(B_1 | A_1)P(B_1 | C_1) + P(B_2 | A_1)P(B_2 | C_1) + P(B_3 | A_1)P(B_3 | C_1)} = \frac{0.1 \times \frac{5}{14}}{0.6 \times \frac{4}{7} + 0.3 \times \frac{1}{14} + 0.1 \times \frac{5}{14}} = \frac{5}{56}$$

ある飲酒運転の検挙用の簡易アルコールセンサーで検査を行うと、

- ・飲酒を行っている人についてアルコールを検出する確率は0.8
(飲酒を行っているのにアルコールを検出できない確率が0.2)
- ・飲酒していないにもかかわらずアルコールを検出してしまう確率が0.3
(飲酒していない人についてアルコールを検出しない確率が0.7)

であるものとする。

このとき、

ヒント: 事前確率が未知

$$P(A_1) = P(A_2) = 0.5$$

原因となる事象

A1: 飲酒している

A2: 飲酒していない

$$P(B_1 | A_1) = 0.8$$

$$P(B_2 | A_1) = 0.2$$

$$P(B_1 | A_2) = 0.3$$

$$P(B_2 | A_2) = 0.7$$

結果となる事象

B1: アルコール反応あり

B2: アルコール反応なし

- 1) 事前分布が未知の被験者において、上記センサによりアルコール反応が出た。
この被験者が飲酒をしている確率、および飲酒をしていない確率をそれぞれ求めよ。

- 2) 車種や検挙暦などから、飲酒運転をしているとは考えにくい被験者については、飲酒の事前確率が0.2であるとする。この被験者から上記センサのアルコール反応があったとき、飲酒している確率を求めよ。

ある飲酒運転の検挙用の簡易アルコールセンサーで検査を行うと、

- ・飲酒を行っている人についてアルコールを検出する確率は0.8
(飲酒を行っているのにアルコールを検出できない確率が0.2)
- ・飲酒していないにもかかわらずアルコールを検出してしまう確率が0.3
(飲酒していない人についてアルコールを検出しない確率が0.7)

であるものとする。

このとき、

ヒント: 事前確率が未知

$$P(A_1) = P(A_2) = 0.5$$

原因となる事象

A1: 飲酒している

A2: 飲酒していない

$$P(B_1 | A_1) = 0.8$$

$$P(B_2 | A_1) = 0.2$$

$$P(B_1 | A_2) = 0.3$$

$$P(B_2 | A_2) = 0.7$$

結果となる事象

B1: アルコール反応あり

B2: アルコール反応なし

- 1) 事前分布が未知の被験者において、上記センサによりアルコール反応が出た。
この被験者が飲酒をしている確率、および飲酒をしていない確率をそれぞれ求めよ。

事前確率 = 0.5

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B_1 | A_i)} =$$

事後確率

$$P(A_2 | B_1) = \frac{P(A_2)P(B_1 | A_2)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B_1 | A_i)} =$$

事後確率

- 2) 車種や検挙暦などから、飲酒運転をしているとは考えにくい被験者については、飲酒の事前確率が0.2であるとする。この被験者から上記センサのアルコール反応があったとき、飲酒している確率を求めよ。

ある飲酒運転の検挙用の簡易アルコールセンサーで検査を行うと、

- ・飲酒を行っている人についてアルコールを検出する確率は0.8
(飲酒を行っているのにアルコールを検出できない確率が0.2)
- ・飲酒していないにもかかわらずアルコールを検出してしまう確率が0.3
(飲酒していない人についてアルコールを検出しない確率が0.7)

であるものとする。

このとき、

原因となる事象

A1: 飲酒している

A2: 飲酒していない

$$P(B_1 | A_1) = 0.8$$

$$P(B_2 | A_1) = 0.2$$

$$P(B_1 | A_2) = 0.3$$

$$P(B_2 | A_2) = 0.7$$

結果となる事象

B1: アルコール反応あり

B2: アルコール反応なし

- 1) 事前分布が未知の被験者において、上記センサによりアルコール反応が出た。
この被験者が飲酒をしている確率、および飲酒をしていない確率をそれぞれ求めよ。

事前確率=0.5

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B_1 | A_i)} = \frac{0.5 \cdot 0.8}{0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.3} = \frac{8}{11}$$

事後確率

$$P(A_2 | B_1) = \frac{P(A_2)P(B_1 | A_2)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B_1 | A_i)} = \frac{3}{11}$$

- 2) 車種や検挙暦などから、飲酒運転をしているとは考えにくい被験者については、飲酒の事前確率が0.2であるとする。この被験者から上記センサのアルコール反応があったとき、飲酒している確率を求めよ。

事前確率=0.2

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1 | A_1)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B_1 | A_i)} = \frac{0.2 \cdot 0.8}{0.2 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.3} = \frac{2}{5}$$

事後確率

事前確率=0.2, 0.8