九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

海事統計学　第13回 （担当：木村）

検定（3）：分散・適合度の検定

授業の資料等は

http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html

検定によってどんなことが判定できるか？

・比率の検定

（1） 母比率 p が、ある値 p_0 に等しいといえるか？

（2） 比率の差の検定： 2つの異なる母集団の間で、母比率に差があるといえるか？

・平均値の検定（正規母集団）

（1） 母集団の平均値 μ が、ある値 μ_0 に等しいといえるか？

（2） 平均値の差の検定： 2つの異なる母集団の間で、母平均に差があるといえるか？

・分散の検定

（1） **正規母集団**の分散 σ^2 が、ある値 σ_0^2 に等しいといえるか？

（2） 分散の差の検定： 2つの異なる**正規母集団**の間で、分散に差があるといえるか？

・適合度の検定

（1） 観察されたデータが、特定の分布に一致しているといえるか？

（2） 2つの母集団の確率分布が異なるものであるかどうか？

分布の種類を問わない
（ノンパラメトリック）
コルモゴロフ・スミルノフ検定

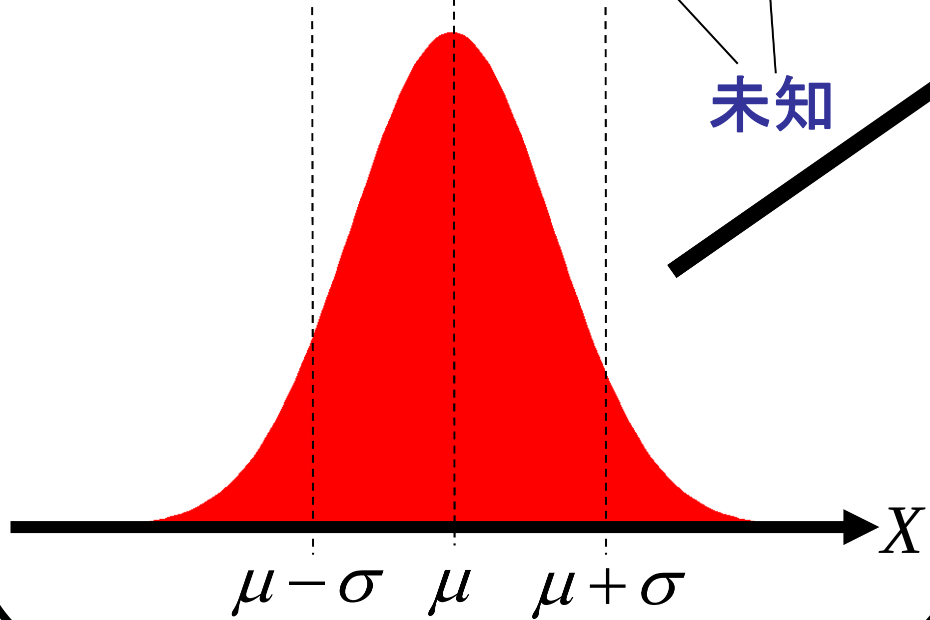
【復習】標本からの分散の区間推定

正規分布であることだけは既知

母集団

期待値 μ 分散 σ^2 の正規分布

未知



母集団分布に従うn個の**標本**

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

標本より、母集団分布の
分散 σ^2 のとりうる範囲
を推定する

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots, + x_n}{n}$$ 標本平均

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$ 標本不偏分散とすると、

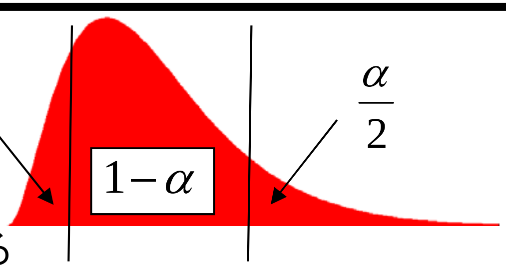
確率変数

$$\boxed{}$$

は**自由度 n-1 の カイ2乗分布**に従う

$\frac{\alpha}{2}$

カイ2乗分布表より値を読み取る

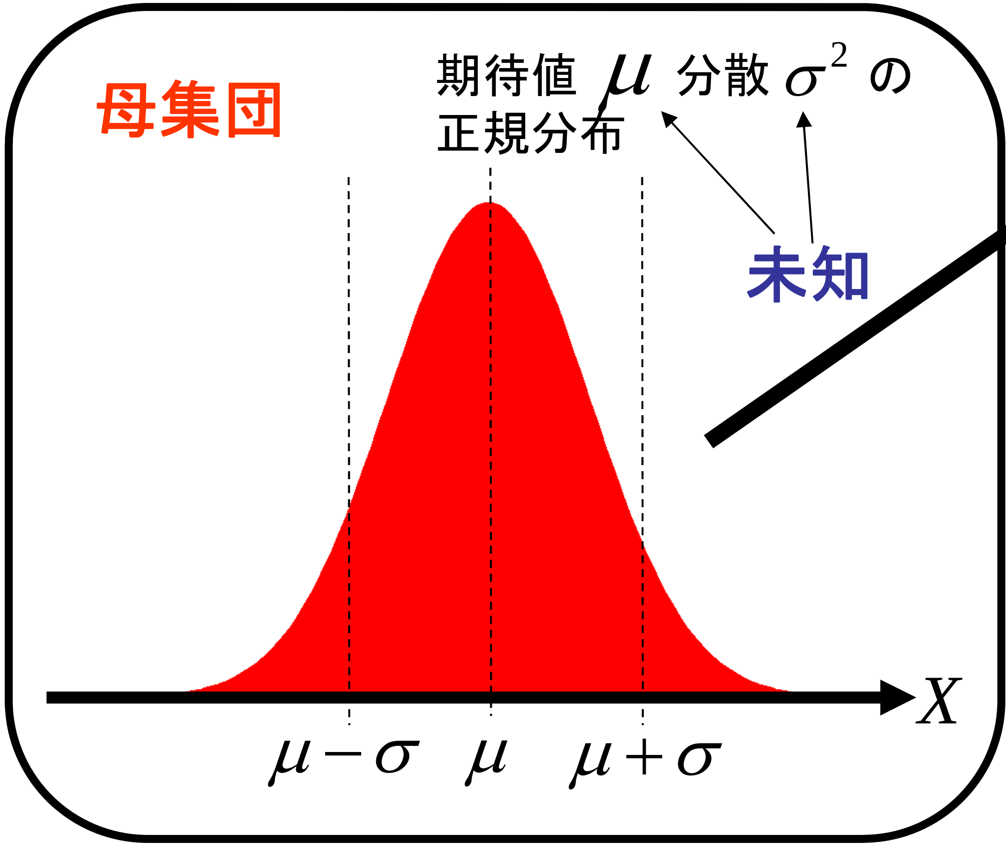


$\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ $\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

よって真の分散 σ^2 の範囲は、**信頼係数** $1-\alpha$ のとき

【復習】標本からの分散の区間推定

正規分布であることだけは既知



母集団分布に従うn個の**標本**

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

標本より、母集団分布の**分散 σ^2 のとりうる範囲**を推定する

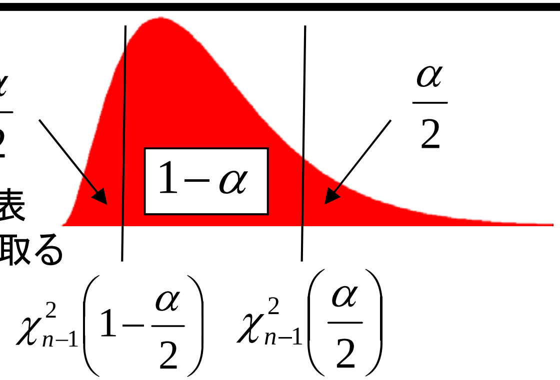
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots, + x_n}{n}$$ 標本平均

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$ 標本不偏分散とすると、

確率変数

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 = \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2}}$$

は**自由度 n-1 の カイ2乗分布**に従う

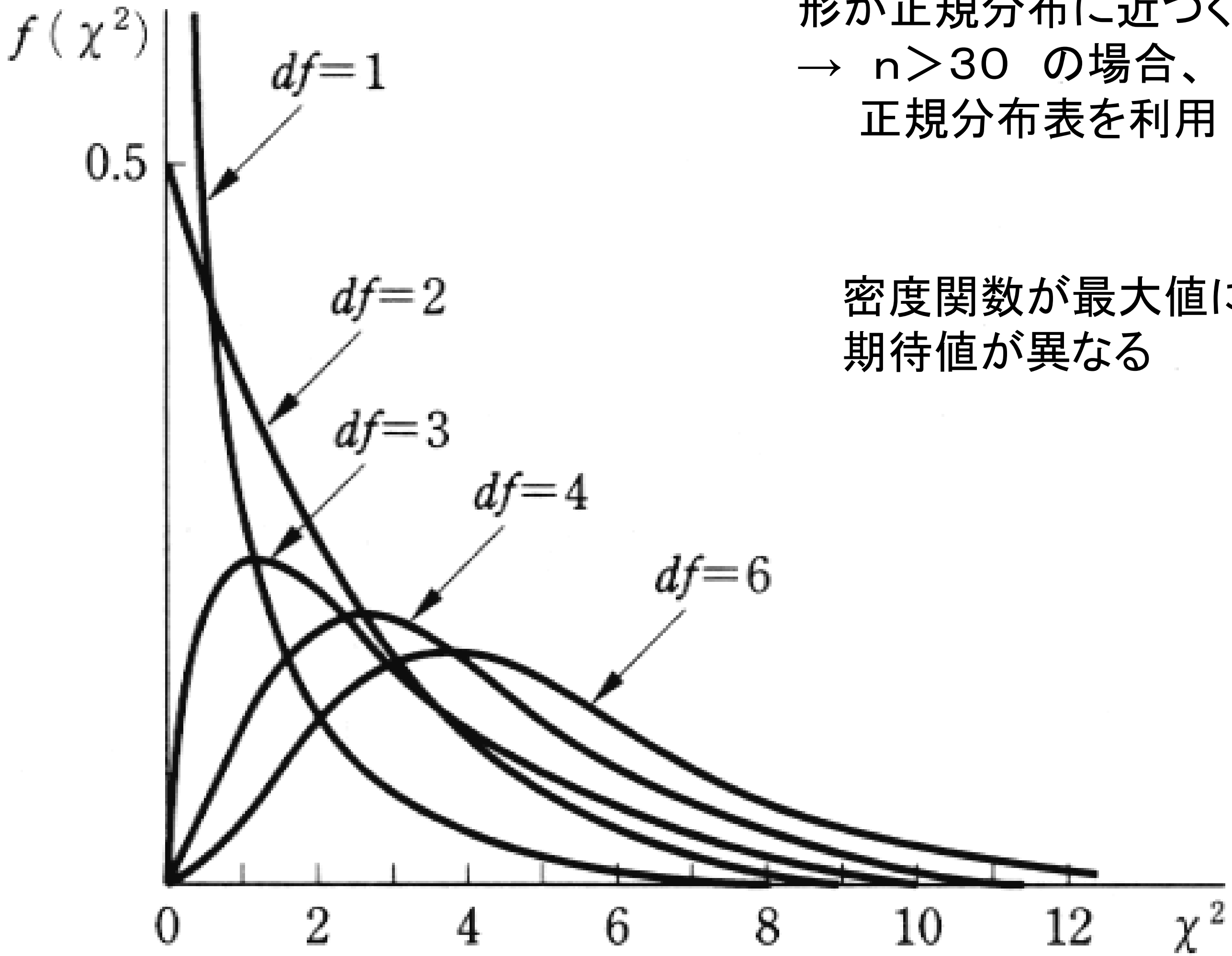


カイ2乗分布表より値を読み取る

よって真の分散 σ^2 の範囲は、**信頼係数** $1-\alpha$ のとき

$$\frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

自由度ｎのカイ2乗分布



自由度ｎが大きくなると
形が正規分布に近づく
→　ｎ＞３０　の場合、
　正規分布表を利用

密度関数が最大値になる値と
期待値が異なる

1．分散の検定

母集団が**正規分布に従う**とき

【帰無仮説】　母集団の分散は $\sigma_0{}^2$ ← **この仮説を検定する**

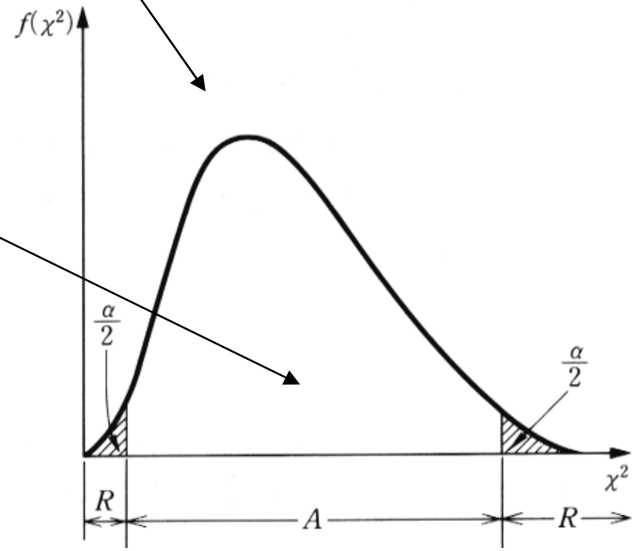
正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う母集団から n 個の標本 $x_1, x_{2,} \cdots, x_n$ を得るとき、

母集団の分散 σ^2 が未知のためその推定値として $U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ を用いる場合、

統計量 $$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 = \boxed{\qquad}$$ は自由度 n-1 のカイ2乗分布に従う

ただし平均値 $$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

実際に得られた標本と仮説からカイ2乗を計算した結果、その値が採択域にあれば**有意水準α**で仮説が採択される。



対立仮説が $\sigma^2 \neq \sigma_0{}^2$ のとき　両側検定

対立仮説が $\sigma^2 > \sigma_0{}^2$, $\sigma^2 < \sigma_0{}^2$ のとき　片側検定

1. 分散の検定

母集団が正規分布に従うとき

【帰無仮説】　母集団の分散は $\sigma_0^{\ 2}$ ← この仮説を検定する

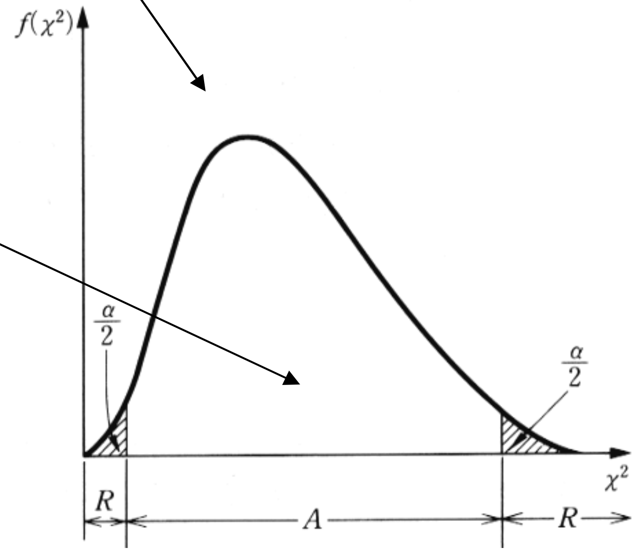
正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う母集団から n 個の標本　$x_1, x_{2,} \cdots, x_n$　を得るとき、

母集団の分散 σ^2 が未知のためその推定値として $U^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ を用いる場合、

統計量　$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 = \boxed{\dfrac{(n-1)U^2}{\sigma^2}}$　は自由度 n-1 のカイ2乗分布に従う

ただし平均値　$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

実際に得られた標本と仮説からカイ2乗を計算した結果、その値が採択域にあれば**有意水準α**で仮説が採択される。



対立仮説が$\sigma^2 \neq \sigma_0^{\ 2}$のとき　両側検定

対立仮説が　$\sigma^2 > \sigma_0^{\ 2}$　$\sigma^2 < \sigma_0^{\ 2}$　のとき　片側検定

【練習問題】

ある製品の製造工程で、製品品質のばらつきはこれまで分散3 で管理されてきた。
この工程に変更を加えたので、ばらつきに変化が生じたかどうかを調べるために
20個の標本をとって標本（不偏）分散を計算したところ $U^2 = 4.85$ であった。

工程変更によってばらつきが増大したといえるか？有意水準5％で検定せよ。

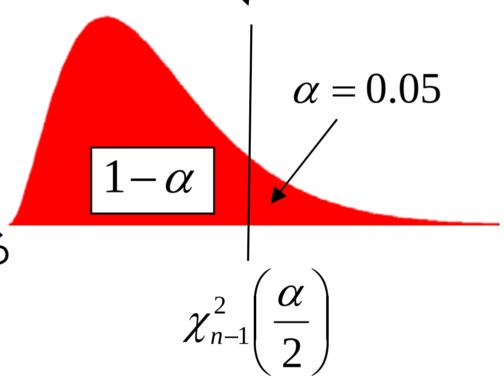
【帰無仮説】$\sigma^2 = \sigma_0{}^2$

【対立仮説】$\sigma^2 > \sigma_0{}^2$

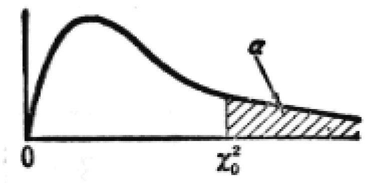
$$\chi^2 = \frac{(n-1)\,U^2}{\sigma^2} =$$

片側検定

カイ2乗分布表
より値を読み取る



χ^2 分 布 表　$\alpha=P(X>\chi_0^2)\to\chi_0^2$



自由度 m	α = 0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.003	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3
8	1.344	1.646	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

【練習問題】

ある製品の製造工程で、製品品質のばらつきはこれまで分散3 で管理されてきた。
この工程に変更を加えたので、ばらつきに変化が生じたかどうかを調べるために
20個の標本をとって標本(不偏)分散を計算したところ $U^2 = 4.85$ であった。

工程変更によってばらつきが増大したといえるか？有意水準5%で検定せよ。

【帰無仮説】$\sigma^2 = \sigma_0^2$

【対立仮説】$\sigma^2 > \sigma_0^2$

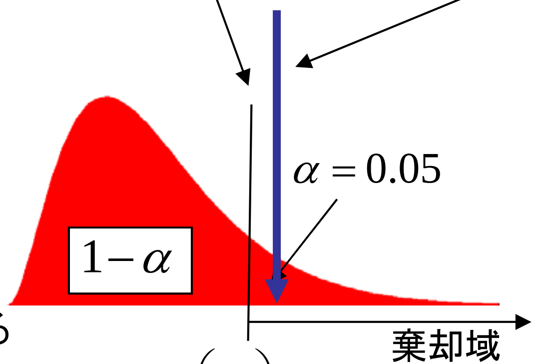
$$\chi^2 = \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} = \frac{(20-1)\times 4.85}{3} = 30.7$$

片側検定

よって棄却域に入るため、
帰無仮説は棄却される:

ばらつきは増大したといえる

カイ2乗分布表
より値を読み取る

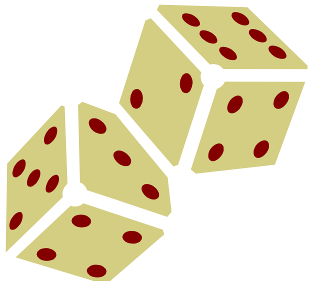


$$\chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 30.1$$

2. 分布の適合度の検定　カイ2乗分布の応用: 「あてはまり」の検定

観察された標本分布がある特定の分布に一致しているといえるかどうか？
【仮説】 標本分布が特定の分布に一致している　→　度数分布が一致

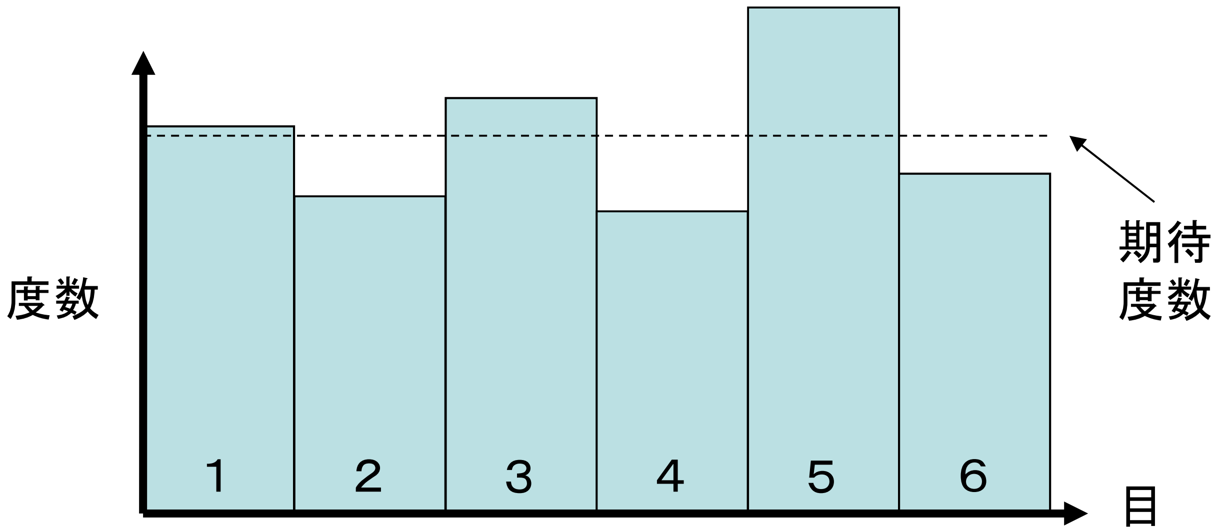
例） サイコロを300回投げたとき観察された目の出現回数



目(クラス) k	1	2	3	4	5	6	計
出現回数（観測度数） f_k	51	42	55	40	67	45	300
期待度数 f_k^*	50	50	50	50	50	50	300

このサイコロが正常かどうかを有意水準5%で検定するには？

度数分布の適合度を検定



2. 分布の適合度の検定

「あてはまり」の検定＝カイ2乗検定

観察された標本分布がある特定の分布に一致しているといえるかどうか？

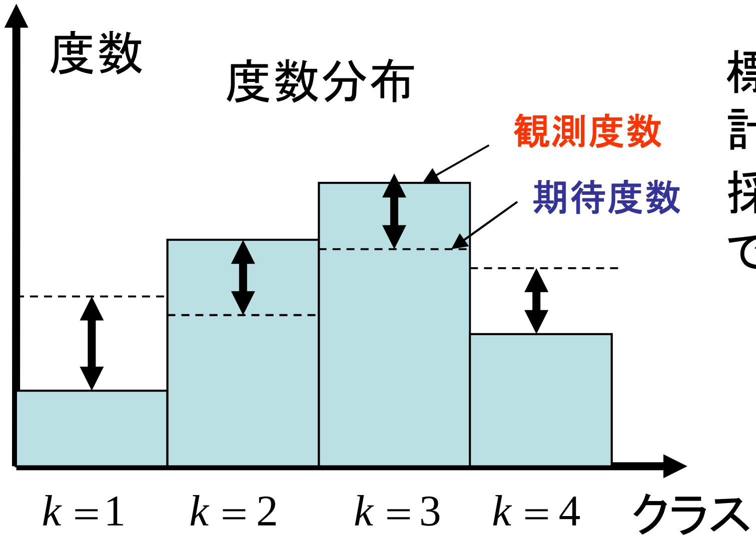
【仮説】 標本分布が特定の分布に一致している → 度数分布が一致

標本分布および仮説による分布が度数分布で表されているとする。
それぞれの第kクラスの度数を f_k および f_k^* ただし $k=1,2,\cdots,m$ とする。
このとき、仮説が正しいならば

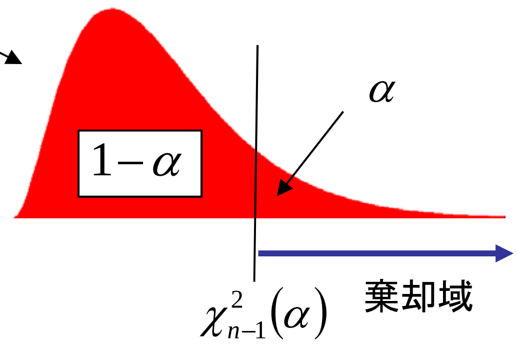
観測度数　期待度数

統計量 $\chi^2 = \boxed{}$ は近似的に自由度 m-1 のカイ2乗分布に従う

ただし、おおよそ $f_k^* \geq 5$



標本と仮説からカイ2乗を計算した結果、その値が採択域にあれば**有意水準α**で仮説が採択される。



データが一致しないなら分子は大きくなりカイ2乗の値は大きくなる

適合度検定の場合はカイ2乗の**片側検定**

2. 分布の適合度の検定

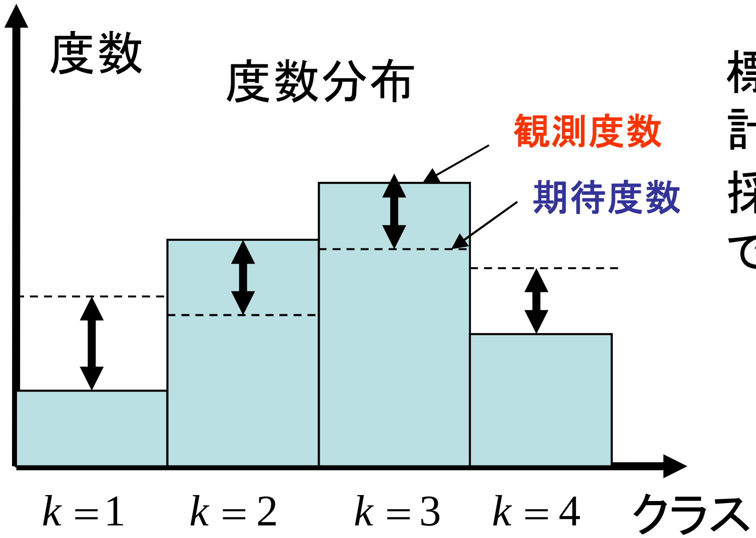
「あてはまり」の検定＝カイ2乗検定

観察された標本分布がある特定の分布に一致しているといえるかどうか？
【仮説】 標本分布が特定の分布に一致している → 度数分布が一致

標本分布および仮説による分布が度数分布で表されているとする。
それぞれの第kクラスの度数を f_k （観測度数） および f_k^* （期待度数） ただし $k = 1, 2, \cdots, m$ とする。
このとき、仮説が正しいならば

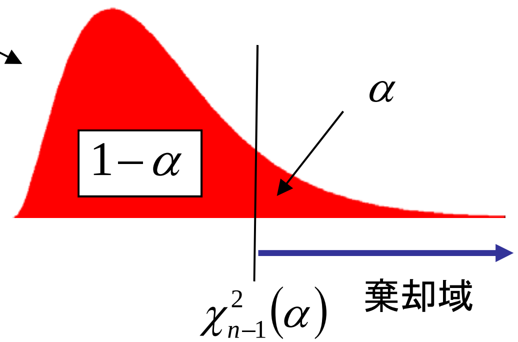
統計量 $$\chi^2 = \boxed{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\left(f_k - f_k^*\right)^2}{f_k^*} \right)}$$ は近似的に自由度 m-1 のカイ2乗分布に従う

ただし、おおよそ $f_k^* \geq 5$



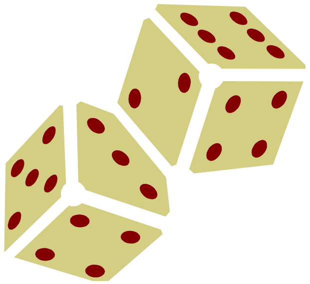
標本と仮説からカイ2乗を計算した結果、その値が採択域にあれば**有意水準α**で仮説が採択される。

データが一致しないなら分子は大きくなりカイ2乗の値は大きくなる



適合度検定の場合はカイ2乗の**片側検定**

例）　サイコロを300回投げたとき観察された目の出現回数



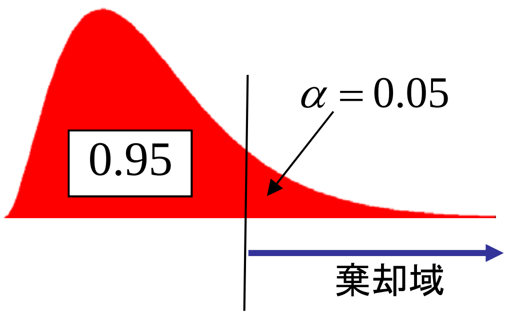
目（クラス） k	1	2	3	4	5	6	計
出現回数（観測度数） f_k	51	42	55	40	67	45	300
期待度数 f_k^*	50	50	50	50	50	50	300

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\left(f_k - f_k^*\right)^2}{f_k^*}\right)$$

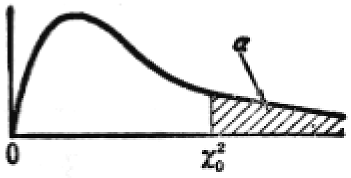
$$= \left(\frac{(51-50)^2}{50}\right) + \left(\frac{(42-50)^2}{50}\right) + \left(\frac{(55-50)^2}{50}\right) + \left(\frac{(40-50)^2}{50}\right) + \left(\frac{(67-50)^2}{50}\right) + \left(\frac{(45-50)^2}{50}\right)$$

$$= 10.08$$

カイ2乗分布表より
自由度6－1＝5
有意水準5％
片側検定の
棄却域を読み取る

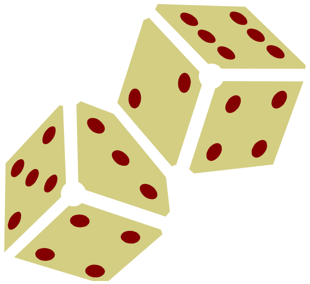


χ^2 分布表 $\alpha = P(X > \chi_0^2) \to \chi_0^2$



自由度 m	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.003	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3
8	1.344	1.646	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

例） サイコロを300回投げたとき観察された目の出現回数



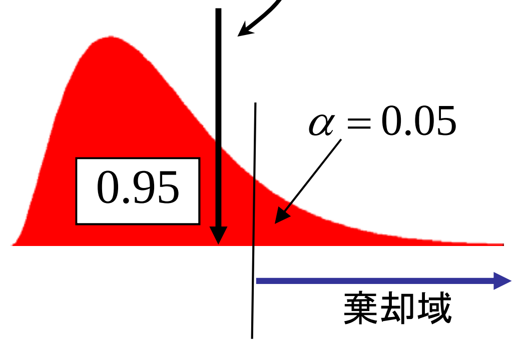
目（クラス） k	1	2	3	4	5	6	計
出現回数（観測度数） f_k	51	42	55	40	67	45	300
期待度数 f_k^*	50	50	50	50	50	50	300

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\left(f_k - f_k^*\right)^2}{f_k^*} \right)$$

$$= \left(\frac{(51-50)^2}{50} \right) + \left(\frac{(42-50)^2}{50} \right) + \left(\frac{(55-50)^2}{50} \right) + \left(\frac{(40-50)^2}{50} \right) + \left(\frac{(67-50)^2}{50} \right) + \left(\frac{(45-50)^2}{50} \right)$$

$$= 10.08$$

カイ2乗分布表より
自由度6−1＝5
有意水準5%
片側検定の
棄却域を読み取る



$\chi^2_{n-1}(0.05) = 11.07$

$$\chi^2 = 10.08 < 11.07$$

よって帰無仮説
（サイコロの目が正しい
＝サイコロの目が
　期待度数分布に従う）
は棄却されない

適合度の検定（カイ2乗検定）：まとめ

標本分布および仮説による分布が度数分布で表されているとする。
それぞれの第kクラスの度数を f_k および f_k^* ただし $k = 1, 2, \cdots, m$ とする。
このとき、仮説が正しいならば

観測度数　期待度数

統計量 $\chi^2 = \boxed{}$ は近似的に自由度 m-1 のカイ2乗分布に従う

ただし、期待度数 $f_k^* \geq 5$

- カイ2乗分布表を使って**片側検定**
- **（期待度数＜5） の場合**は、クラスを統合して度数を５以上にする

次回の講義にて詳しく説明

適合度の検定（カイ2乗検定）：まとめ

標本分布および仮説による分布が度数分布で表されているとする。
それぞれの第kクラスの度数を f_k および f_k^* ただし $k = 1, 2, \cdots, m$ とする。
このとき、仮説が正しいならば

観測度数 (f_k)　期待度数 (f_k^*)

統計量 $$\chi^2 = \boxed{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\left(f_k - f_k^* \right)^2}{f_k^*} \right)}$$ は近似的に自由度 m-1 のカイ2乗分布に従う

ただし、期待度数 $f_k^* \geq 5$

- カイ2乗分布表を使って**片側検定**
- **（期待度数＜5） の場合**は、クラスを統合して度数を5以上にする

↓

次回の講義にて詳しく説明

【演習問題】　2018.05.29　学籍番号　　　　氏名

次のデータは、5枚のコインを320回投げて表の出た枚数を調べたものである。
これらのコインは正しいコイン(表の出る確率が0.5)と言えるか？
有意水準5%で検定せよ。

表の枚数	0	1	2	3	4	5	計
観察された回数	6	56	87	109	49	13	320
期待度数							

帰無仮説／対立仮説は？

各クラスの期待度数は？

棄却域の範囲は？

データから計算されるカイ2乗の値は？

帰無仮説は棄却されるか？

結論は？

【演習問題】　　　　　　　　学籍番号　　　　　　　　氏名

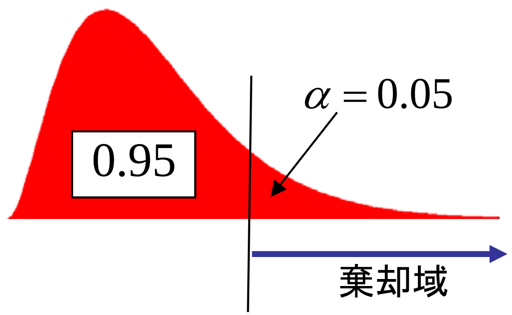
次のデータは、5枚のコインを320回投げて表の出た枚数を調べたものである。
これらのコインは正しいコイン（表の出る確率が0.5）と言えるか？
有意水準5%で検定せよ。

表の枚数	0	1	2	3	4	5	計
観察された回数	6	56	87	109	49	13	320
期待度数	10	50	100	100	50	10	320

$$\chi^2=\frac{(6-10)^2}{10}+\frac{(56-50)^2}{50}+\frac{(87-100)^2}{100}+\frac{(109-100)^2}{100}+\frac{(49-50)^2}{50}+\frac{(13-10)^2}{10}$$

$$=?$$

カイ2乗分布表より
自由度6－1＝5
有意水準5%
片側検定の
棄却域を読み取る



$$\chi_5^2(0.05)=11.07$$

【演習問題】　　　　　　　　　　学籍番号　　　　　　　　氏名

次のデータは、5枚のコインを320回投げて表の出た枚数を調べたものである。
これらのコインは正しいコイン（表の出る確率が0.5）と言えるか？
有意水準5%で検定せよ。

表の枚数	0	1	2	3	4	5	計
観察された回数	6	56	87	109	49	13	320
期待度数	10	50	100	100	50	10	320

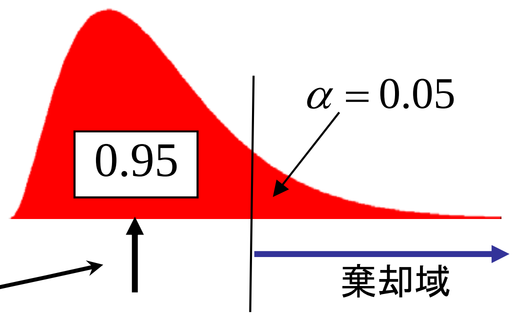
$$\chi^2 = \frac{(6-10)^2}{10} + \frac{(56-50)^2}{50} + \frac{(87-100)^2}{100} + \frac{(109-100)^2}{100} + \frac{(49-50)^2}{50} + \frac{(13-10)^2}{10}$$

$$= 5.74$$

$$\chi^2 = 5.74 < 11.07$$

よって仮説は棄却されない
＝正しいコインであることを
　否定できない

カイ2乗分布表より
自由度6－1＝5
有意水準5%
片側検定の
棄却域を読み取る



$\chi_5^2(0.05) = 11.07$