

九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

システム設計工学（担当：木村）

(3) 補間・関数近似と計算幾何学

場所： 船1講義室

授業の資料等は

<http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html>

多項式曲線 (2~3次元) $\mathbf{P}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$

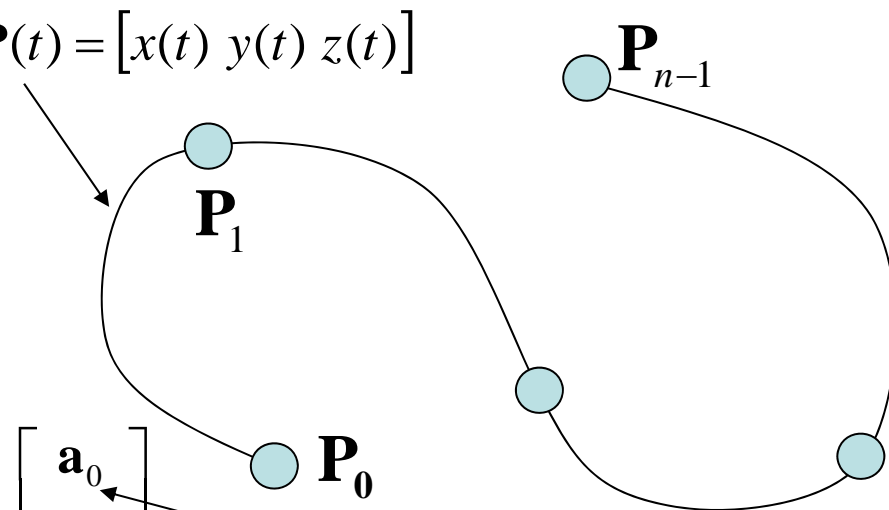
曲線を通過させたい点列 \mathbf{P}_i に対して、
 曲線の長さに関連したパラメータ t
 を与え、曲線を以下の多項式で表現する:

$$\mathbf{P}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$$

$$= \boxed{} = [1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^j \ \dots \ t^{m-1}]$$

通過点列 \mathbf{P}_i に対して、係数ベクトルは
 以下の方程式を満たす:

$$\boxed{} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_i \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n-1} \end{bmatrix}$$



\mathbf{a}_0
 \mathbf{a}_1
 \mathbf{a}_2
 \vdots
 \mathbf{a}_j
 \vdots
 \mathbf{a}_{m-1}

係数ベクトル
 x, y, z にそれぞれ
 対応した値を持つ
 これを決めれば、曲線上の
 t で指定される (x, y, z) 座標が
 与えられる (曲線補間)

よって、 $m=n$ ならば、
 係数行列は左辺の行列の
 逆行列を計算して行列 \mathbf{P} を
 乗ずること得る。

多項式曲線 (2~3次元) $\mathbf{P}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$

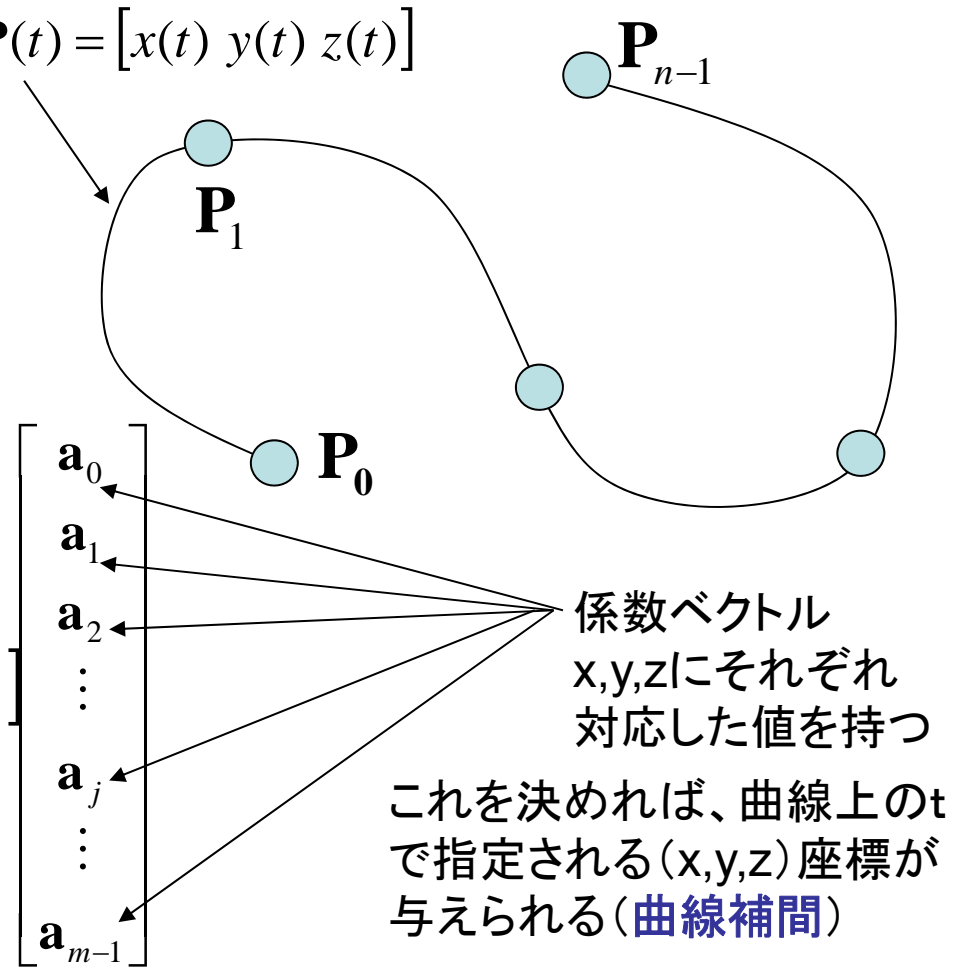
曲線を通過させたい点列 \mathbf{P}_i に対して、
 曲線の長さに関連したパラメータ t
 を与え、曲線を以下の多項式で表現する:

$$\mathbf{P}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{a}_j t^j = [1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^j \ \dots \ t^{m-1}]$$

通過点列 \mathbf{P}_i に対して、係数ベクトルは
 以下の方程式を満たす:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^j & \dots & t_0^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_i & \dots & t_i^j & \dots & t_i^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{n-1} & \dots & t_{n-1}^j & \dots & t_{n-1}^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_i \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n-1} \end{bmatrix}$$



よって、 $m=n$ ならば、
 係数行列は左辺の行列の
 逆行列を計算して行列 \mathbf{P} を
 乗ずることで得る。

多項式曲線

さらに、曲線の両端末での接線ベクトルの方向を指定する場合：

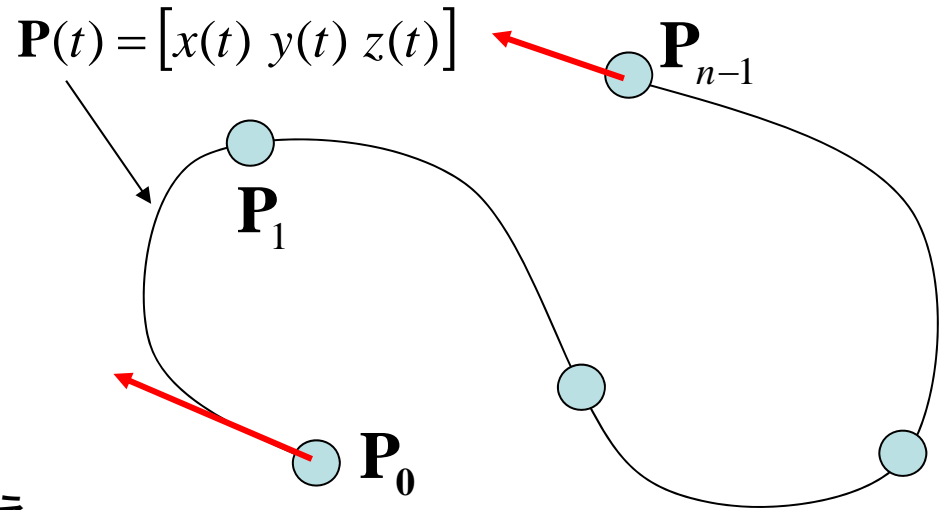
$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \boxed{\phantom{\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_{m-1}}} \text{より、}$$

係数ベクトルの方程式の拘束条件が2つ増え、以下の方程式が成り立つ：

$$\begin{bmatrix}
 1 & t_0 & \dots & t_0^j & \dots & t_0^{m-1} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 1 & t_i & \dots & t_i^j & \dots & t_i^{m-1} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 1 & t_{n-1} & \dots & t_{n-1}^j & \dots & t_{n-1}^{m-1} \\
 \hline
 \hline
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{a}_0 \\
 \vdots \\
 \mathbf{a}_j \\
 \vdots \\
 \mathbf{a}_{m-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{P}_0 \\
 \vdots \\
 \mathbf{P}_i \\
 \vdots \\
 \mathbf{P}_{n-1} \\
 \hline
 \hline
 \end{bmatrix}$$

端部の接線の条件

よって、 $m=n+2$ ならば、係数行列は左辺の行列の逆行列を計算して行列Pを乗ずること得る。



多項式曲線

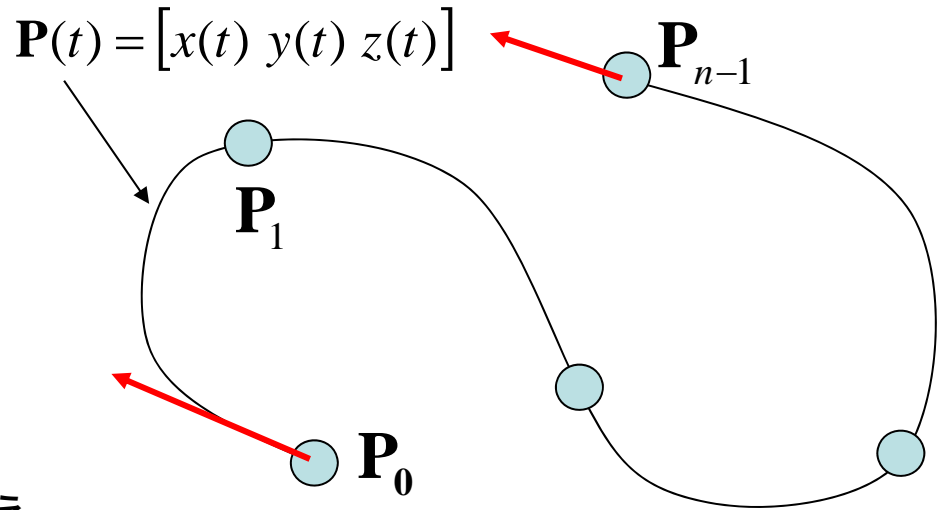
さらに、曲線の両端末での
接線ベクトルの方向を指定する場合：

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^{m-1} j \mathbf{a}_j t^{j-1} \quad \text{より、}$$

係数ベクトルの方程式の拘束条件が2つ増え、
以下の方程式が成り立つ：

$$\begin{bmatrix}
 1 & t_0 & \cdots & t_0^j & \cdots & t_0^{m-1} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 1 & t_i & \cdots & t_i^j & \cdots & t_i^{m-1} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 1 & t_{n-1} & \cdots & t_{n-1}^j & \cdots & t_{n-1}^{m-1} \\
 0 & 1 & \cdots & j t_0^{j-1} & \cdots & (m-1) t_0^{m-2} \\
 0 & 1 & \cdots & j t_{n-1}^{j-1} & \cdots & (m-1) t_{n-1}^{m-2}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{a}_0 \\
 \vdots \\
 \mathbf{a}_j \\
 \vdots \\
 \mathbf{a}_{m-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{P}_0 \\
 \vdots \\
 \mathbf{P}_i \\
 \vdots \\
 \mathbf{P}_{n-1} \\
 \dot{\mathbf{P}}_0 \\
 \dot{\mathbf{P}}_{n-1}
 \end{bmatrix}$$

端部の接線の条件



よって、 $m=n+2$ ならば、係数行列は左辺の行列の
逆行列を計算して行列Pを乗ずること得る。

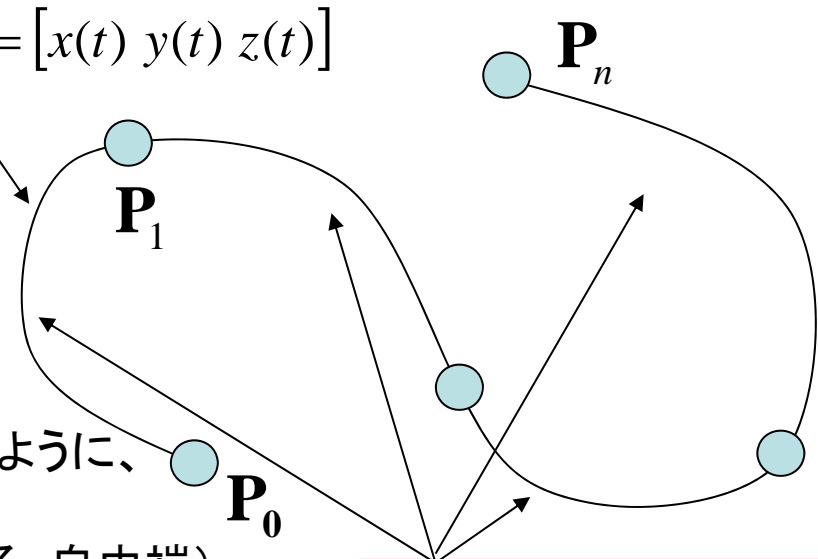
スプライン曲線

自由端3次スプライン曲線

1) 隣り合う2つの通過点間を
3次多項式曲線で表現

2) 通過点における接線方向ベクトルが等しくなるように、
隣接する3次多項式曲線の端点を設定する
(ただし端点では2次微分=0の拘束条件を入れる: 自由端)

$$\mathbf{S}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$$



それぞれの区間で
別々の3次多項式曲線
を求める

3次多項式曲線

$$\mathbf{S}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2 + \mathbf{d}t^3$$

未知数4コ

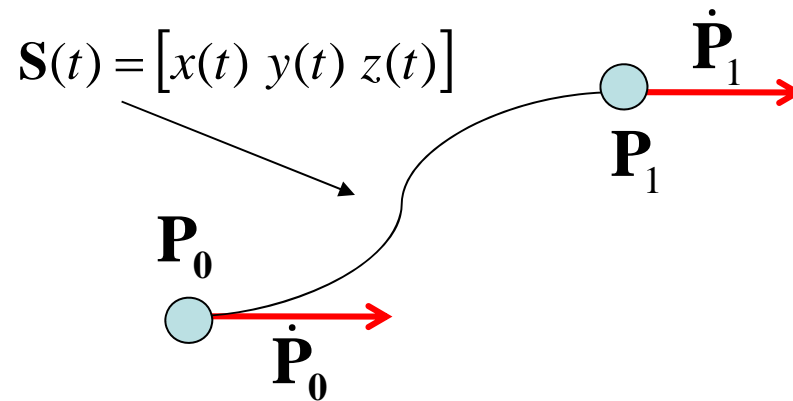
端点の座標 = 2つの拘束条件

端点の接線方向 = 2つの拘束条件

4つの拘束条件より、
4つの未知数を求める

隣り合う区間での3次多項式曲線の接線が等しいとした連立方程式を立てて解く
→ 3重対角行列の逆行列を解く問題へ帰着

スプライン曲線



P_0 から P_1 までの区間で媒介変数 t が $0 \sim 1$ の値をとる場合、3次スプライン曲線は以下のように簡単に与えられる:

$$\mathbf{S}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2 + \mathbf{d}t^3$$
$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \dot{\mathbf{P}}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}_1 \end{bmatrix}$$

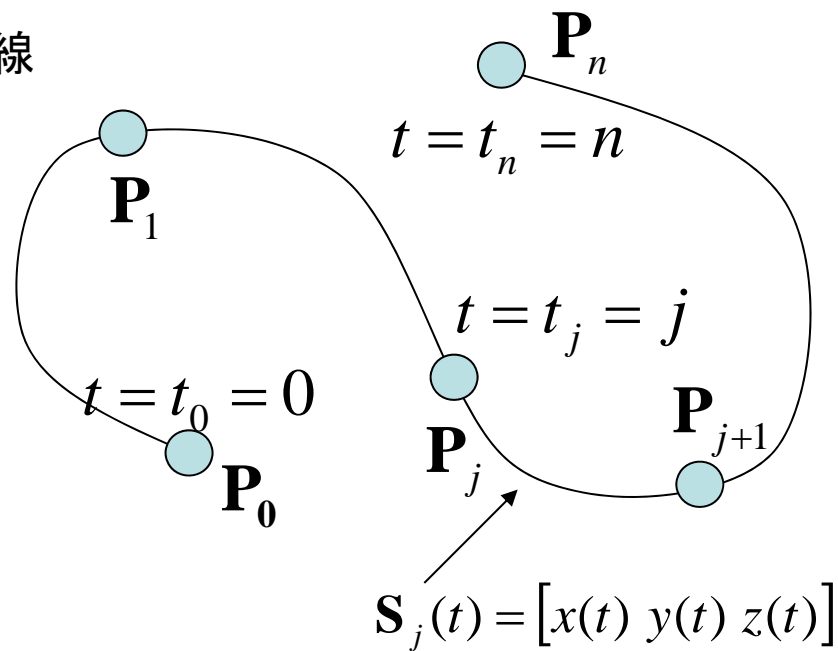
スプライン曲線 自由端3次スプライン曲線

各区間で3次スプライン曲線を以下のように定義する:

$$\mathbf{S}_j(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$$

$$= \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j(t - t_j) + \mathbf{c}_j(t - t_j)^2 + \mathbf{d}_j(t - t_j)^3$$

各区間では0~1



上記のスプライン曲線に以下の拘束条件を与える:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_j(t = j) &= \mathbf{P}_j = [x_j \ y_j \ z_j] \\ \mathbf{S}_j(t = j+1) &= \mathbf{S}_{j+1}(j+1) = \mathbf{P}_{j+1} = [x_{j+1} \ y_{j+1} \ z_{j+1}] \end{aligned} \right\} \text{通過する点の座標}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_j(t = j+1) &= \dot{\mathbf{S}}_{j+1}(j+1) \\ \ddot{\mathbf{S}}_j(j+1) &= \ddot{\mathbf{S}}_{j+1}(j+1) \end{aligned} \right\} \text{隣接する曲線の傾きと2次微分が同じ}$$

$$\left. \ddot{\mathbf{S}}_0(0) = \ddot{\mathbf{S}}_{n-1}(n) = 0 \right\} \text{曲線の両端の2次微分=0}$$

これらの方程式を係数について解くと次スライドのようになる:

参考資料:「簡略化した3次スプライン曲線の生成方法」
<http://www5d.biglobe.ne.jp/~stssk/maze/spline.html>

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{P}_j$$

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_{j+1} - \mathbf{a}_j - \frac{(\mathbf{c}_{j+1} + 2\mathbf{c}_j)}{3}$$

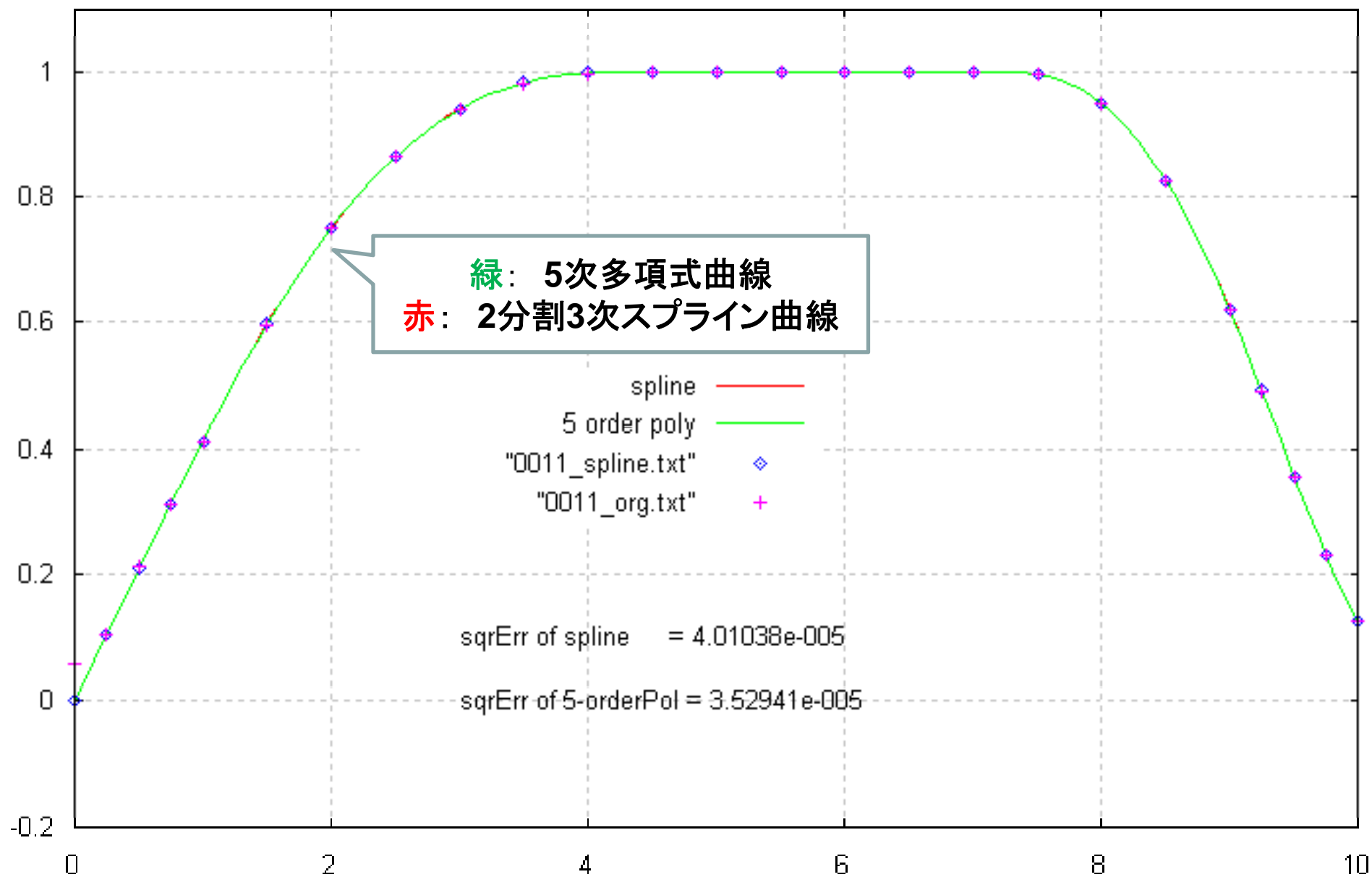
$$\mathbf{d}_j = \frac{(\mathbf{c}_{j+1} + 2\mathbf{c}_j)}{3}$$

\mathbf{c}_j については、以下の連立方程式を解く:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n-2} \\ \mathbf{c}_{n-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 3(\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_0) \\ 3(\mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1) \\ 3(\mathbf{a}_4 - 2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2) \\ \vdots \\ 3(\mathbf{a}_{n-1} - 2\mathbf{a}_{n-2} + \mathbf{a}_{n-3}) \\ 3(\mathbf{a}_n - 2\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_{n-2}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

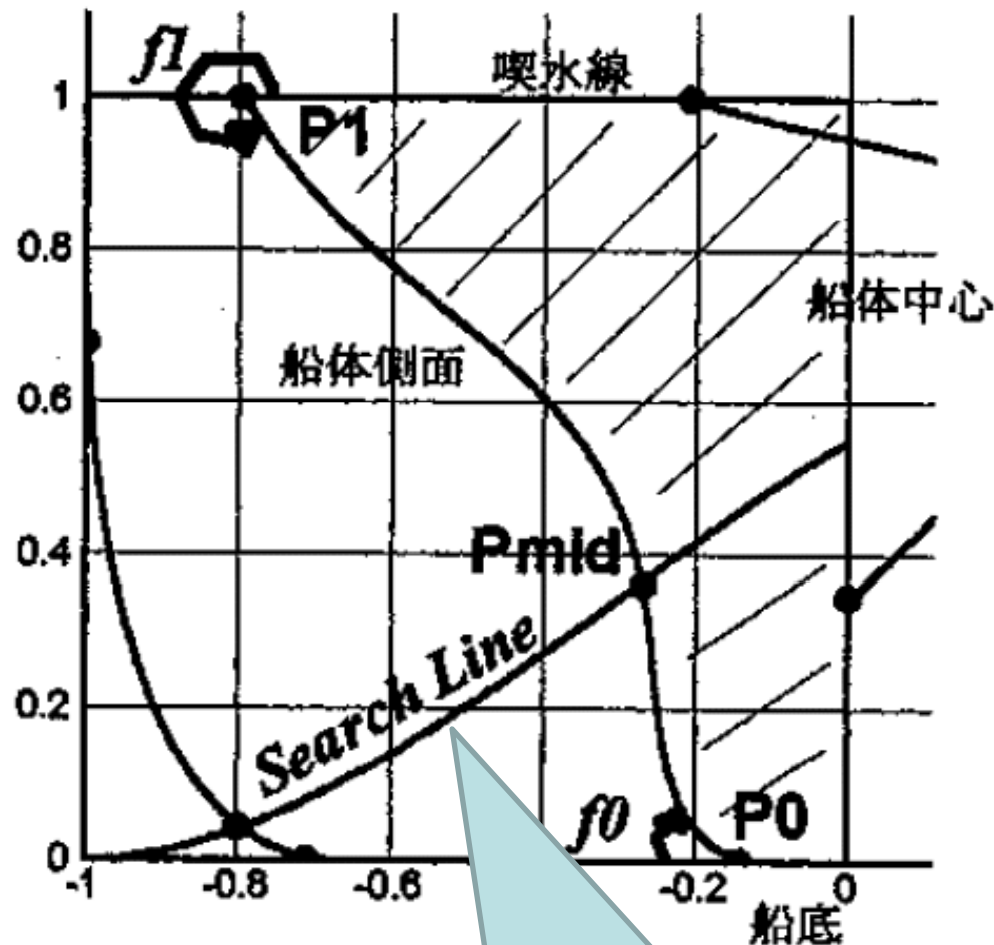
これで全ての区間のスプライン曲線の係数が求められる。

多項式曲線・スプライン曲線の使用例: Cpカーブの表現



スプライン曲線の使用例：線図創生法

船型設計システムについて—線図創生—
SRC News No.62, Jan., pp.8--9, 2005,
造船技術センター(SRC)



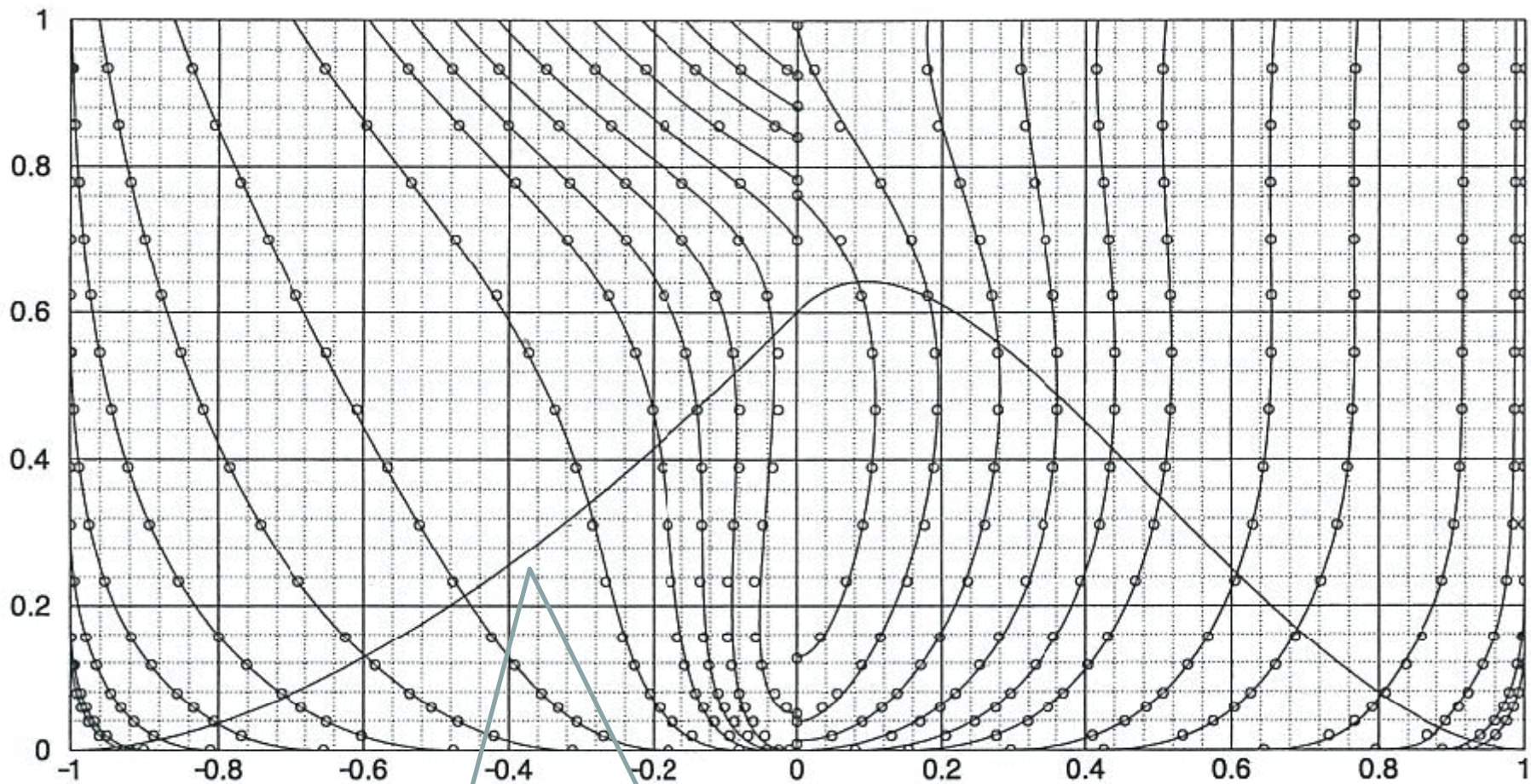
- ・肋骨線形状をサーチライン上に分割点を持つ2分割**パラメトリック3次スプライン曲線**で表現する。
- ・肋骨線の両端の点の角度と曲率を与える(隣り合う肋骨線同士での値がなめらかに変化するよう配慮)
- ・端点P1, P2の座標(サイドタンジェンシャル・フラットボトム)を適宜与える
- ・船体断面の面積が該当位置のCpカーブの値×Cmと一致するよう、サーチライン上でスプライン曲線の分割点を探索する←**ラインサーチ**

これも**パラメトリック3次スプライン曲線**
パラメータ t ($0 < t < 1$) で位置を指定

パラメトリック3次スプライン曲線:

$$\begin{cases} x = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \end{cases}$$

線図創生法で生成された線図の一例

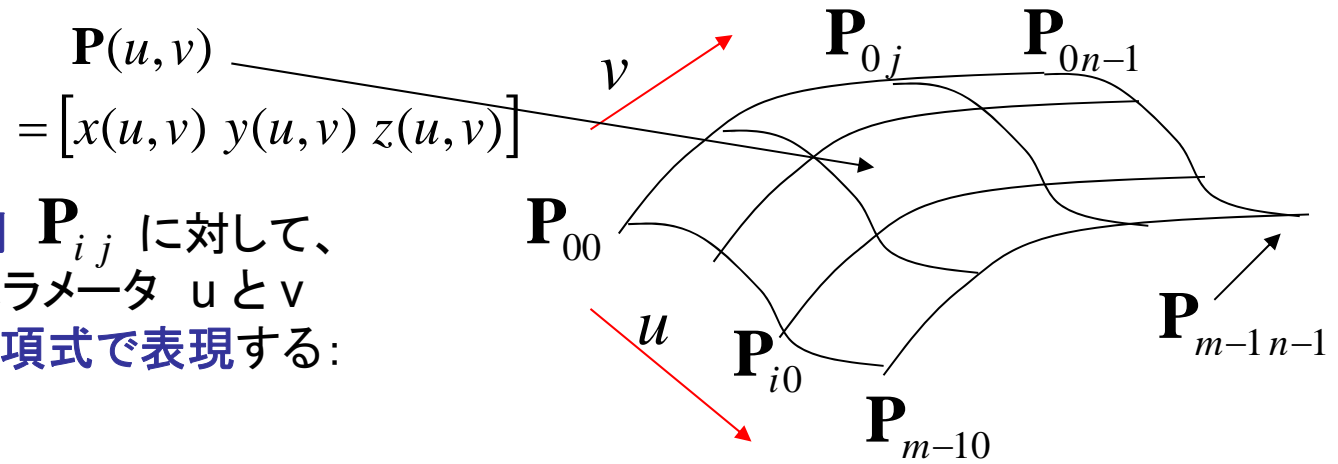


サーチラインは船体の前部と後部で別のものを用いるが、並行部付近(船体下部)では同じ角度と曲率にする

多項式曲面

(3次元)

曲面を通過させたい点列 \mathbf{P}_{ij} に対して、
 曲線の長さに関連したパラメータ u と v
 を与え、曲面を以下の多項式で表現する:



$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{a}_{ij} u^i v^j$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & u^i & \cdots & u^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{00} & \cdots & \mathbf{a}_{0j} & \cdots & \mathbf{a}_{0m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{i0} & \cdots & \mathbf{a}_{ij} & \cdots & \mathbf{a}_{im-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m-10} & \cdots & \mathbf{a}_{m-1j} & \cdots & \mathbf{a}_{m-1m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ v^j \\ \vdots \\ v^{m-1} \end{bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{V}^T$$

曲面係数マトリクスA

これを決めれば、曲面上の (u, v) で指定される x, y, z 座標が与えられる (曲面補間)

→ 曲面の通過点列から曲面係数マトリクスを求めるには？

多項式曲面

曲面通過点列 $\mathbf{P}_{i j}$ についての行列を定義:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \xrightarrow{v} \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow u \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \cdots & \mathbf{P}_{0j} & \cdots & \mathbf{P}_{0n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{i0} & \cdots & \mathbf{P}_{ij} & \cdots & \mathbf{P}_{in-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{n-10} & \cdots & \mathbf{P}_{n-1j} & \cdots & \mathbf{P}_{n-1n-1} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

各通過点に対応する u, v ベクトルの行列を定義:

$$U = \begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & \cdots & u_0^j & \cdots & u_0^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u_i & \cdots & u_i^j & \cdots & u_i^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u_{n-1} & \cdots & u_{n-1}^j & \cdots & u_{n-1}^{m-1} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & v_0 & \cdots & v_0^j & \cdots & v_0^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_i & \cdots & v_i^j & \cdots & v_i^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_{n-1} & \cdots & v_{n-1}^j & \cdots & v_{n-1}^{m-1} \end{bmatrix}$$

多項式曲面はこれらの点列を通るので、以下の式が成り立つ:



曲面係数マトリクス



曲線の場合同様、端部の拘束条件を入れることもできる

多項式曲面

曲面通過点列 $\mathbf{P}_{i j}$ についての行列を定義:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \xrightarrow{v} \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \downarrow u \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \cdots & \mathbf{P}_{0j} & \cdots & \mathbf{P}_{0n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{i0} & \cdots & \mathbf{P}_{ij} & \cdots & \mathbf{P}_{in-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{n-10} & \cdots & \mathbf{P}_{n-1j} & \cdots & \mathbf{P}_{n-1n-1} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

各通過点に対応する u, v ベクトルの行列を定義:

$$U = \begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & \cdots & u_0^j & \cdots & u_0^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u_i & \cdots & u_i^j & \cdots & u_i^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u_{n-1} & \cdots & u_{n-1}^j & \cdots & u_{n-1}^{m-1} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & v_0 & \cdots & v_0^j & \cdots & v_0^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_i & \cdots & v_i^j & \cdots & v_i^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_{n-1} & \cdots & v_{n-1}^j & \cdots & v_{n-1}^{m-1} \end{bmatrix}$$

多項式曲面はこれらの点列を通るので、以下の式が成り立つ:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{V}^T$$

曲面係数マトリクス

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{P} (\mathbf{V}^T)^{-1}$$

曲線の場合同様、端部の拘束条件を入れることもできる

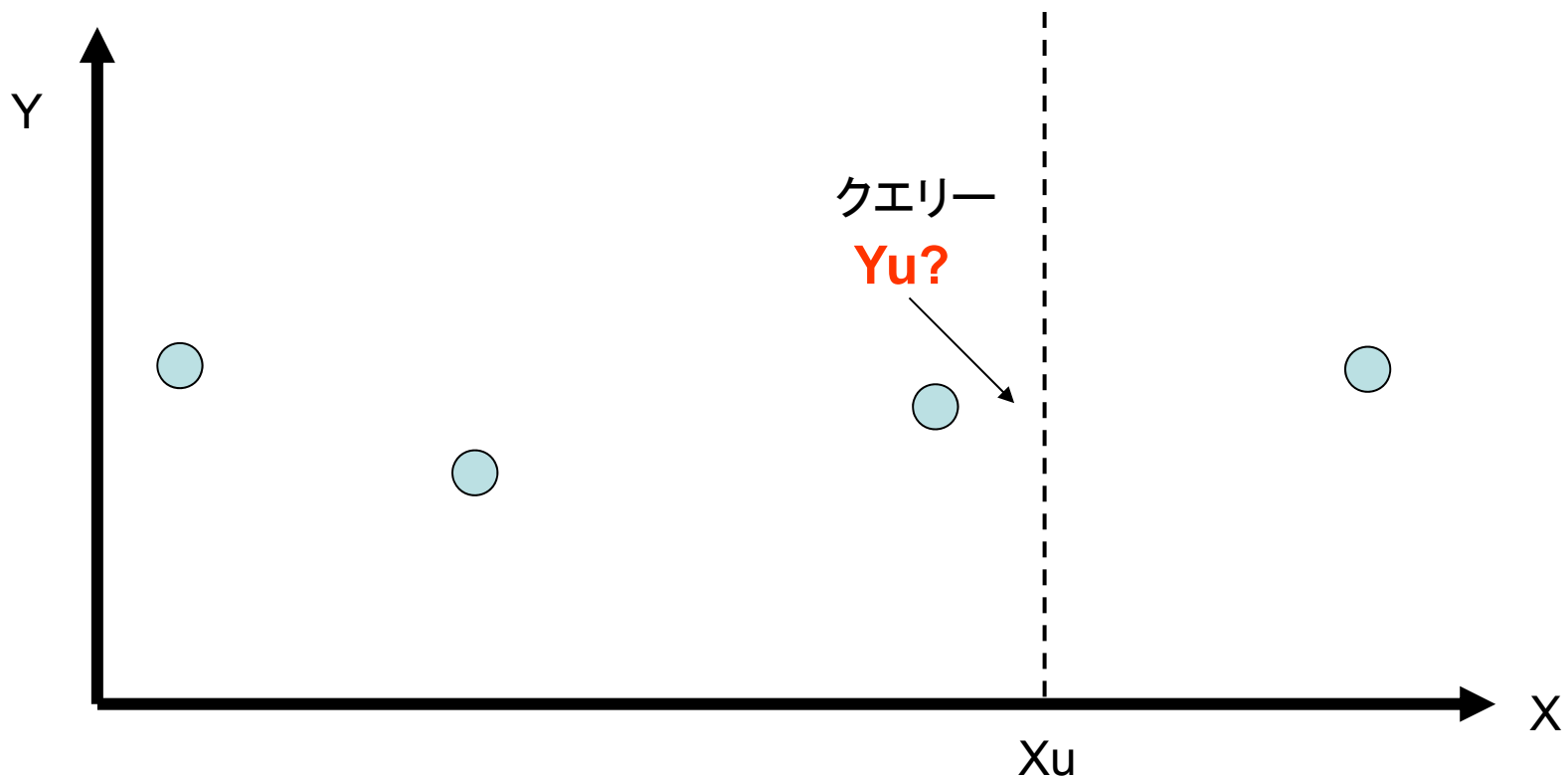
【関数近似の問題設定】

多次元空間 X

データ群は**まばらで少ない**

データ群 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ が与えられているもとで、
未知なる X_u についての Y_u の値を求める

ただし $X_1 \sim X_n, Y_1 \sim Y_n, X_u, Y_u$ は全て有界な値 (スカラー or ベクトル量)



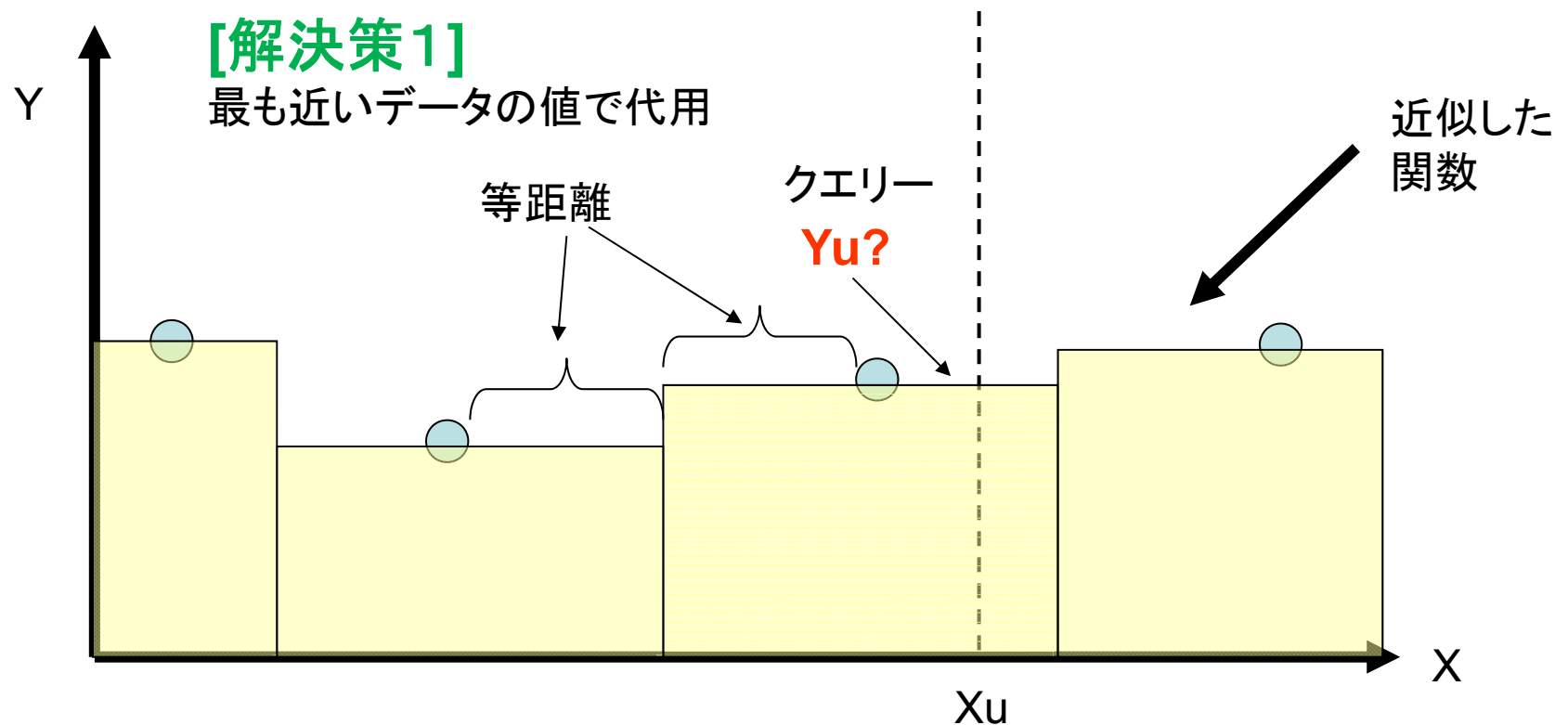
【関数近似の問題設定】

多次元空間 X

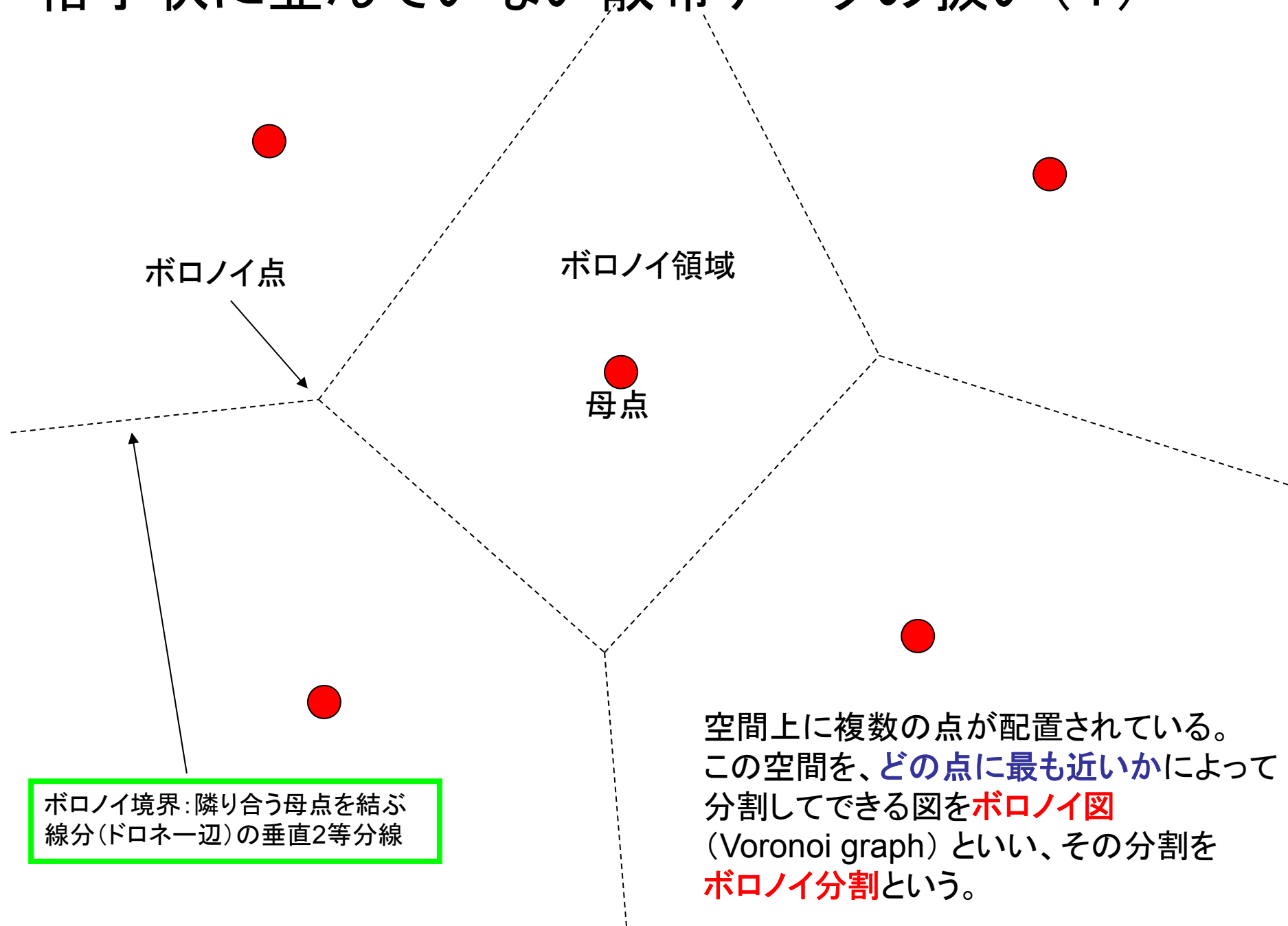
データ群はまばらで少ない

データ群 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ が与えられているもとで、未知なる X_u についての Y_u の値を求める

ただし $X_1 \sim X_n, Y_1 \sim Y_n, X_u, Y_u$ は全て有界な値 (スカラー or ベクトル量)



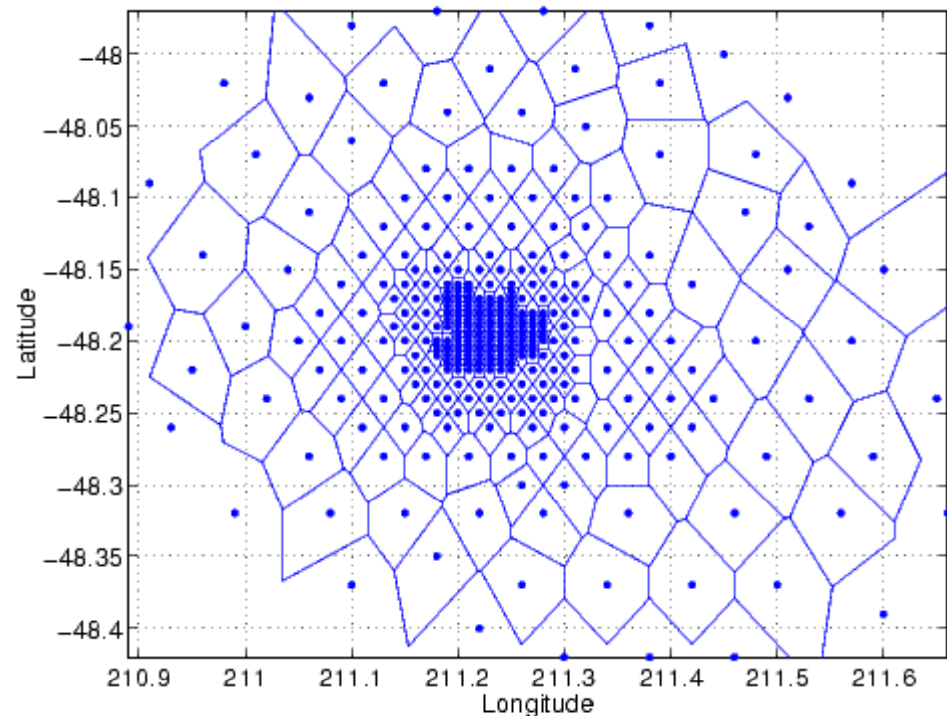
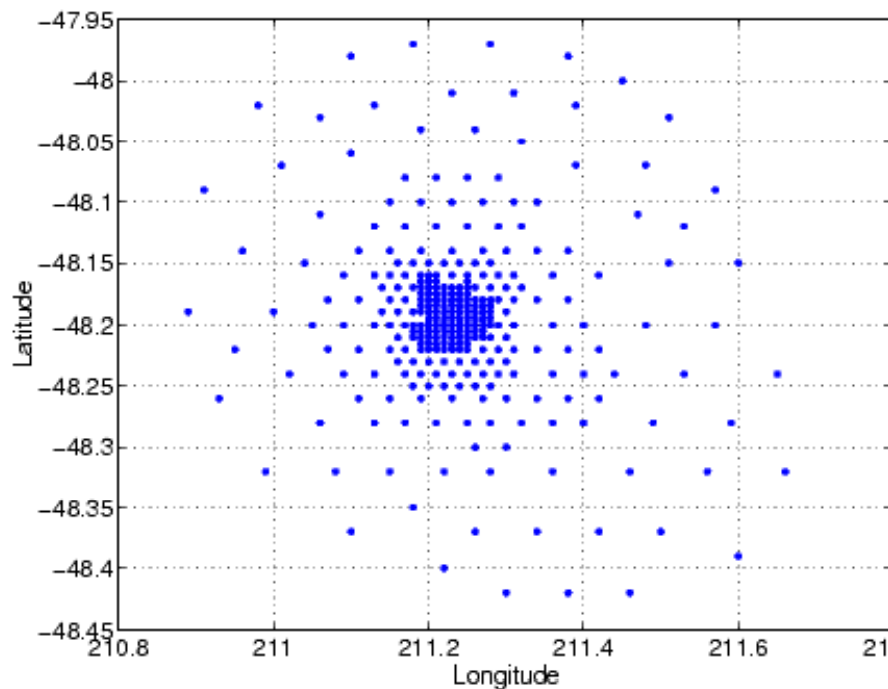
格子状に並んでいない散布データの扱い(1)



ボロノイ分割の応用:

- ・パターン認識(識別・クラスタリング)
- ・データの符号化(量子化)
- ・施設・サービス等の勢力圏の分析など

関数近似や補間よりも「離散化」に適する



http://dl.cybernet.co.jp/matlab/support/manual/r14/toolbox/matlab/math/?/matlab/support/manual/r14/toolbox/matlab/math/poly_i18.shtml より

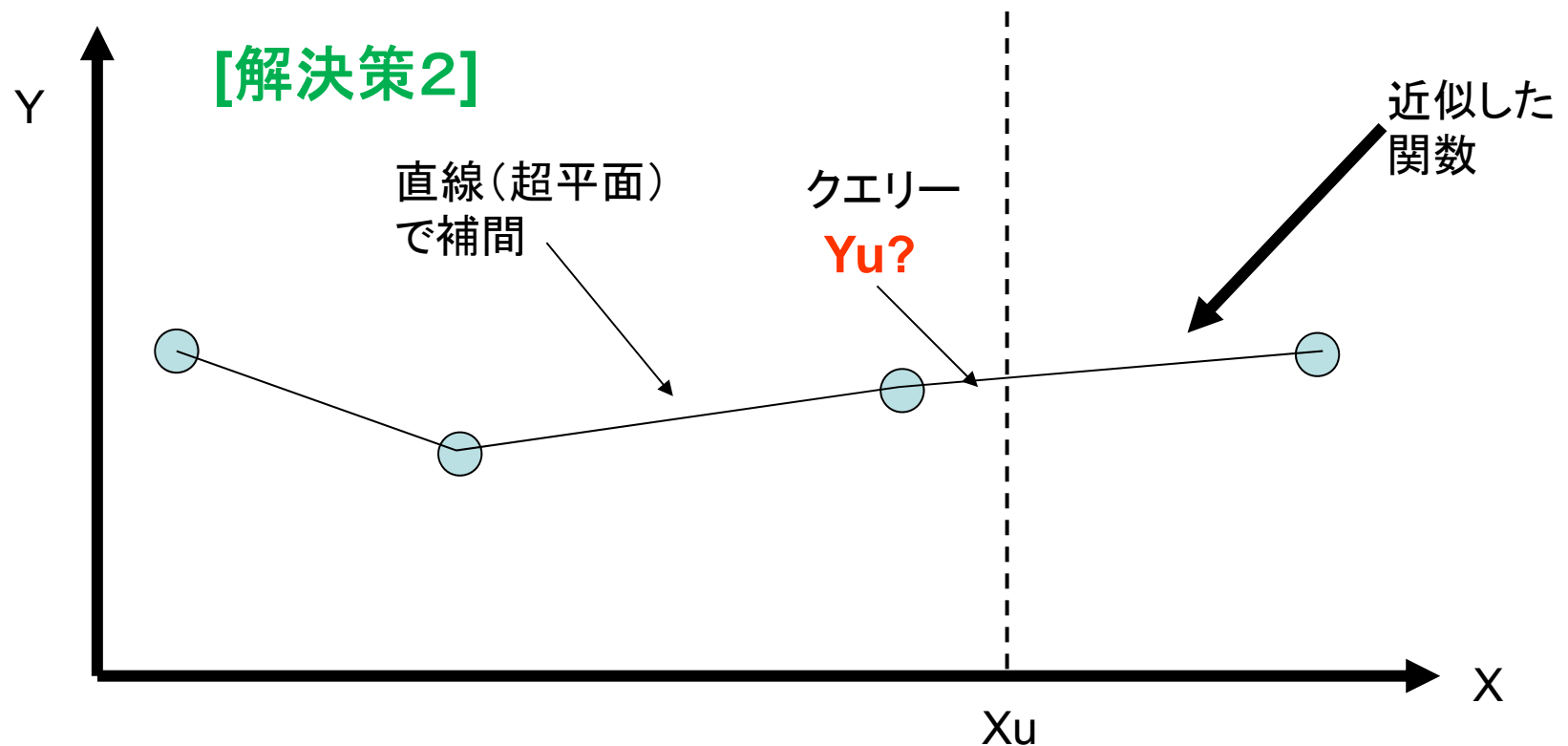
【関数近似の問題設定】

多次元空間 X

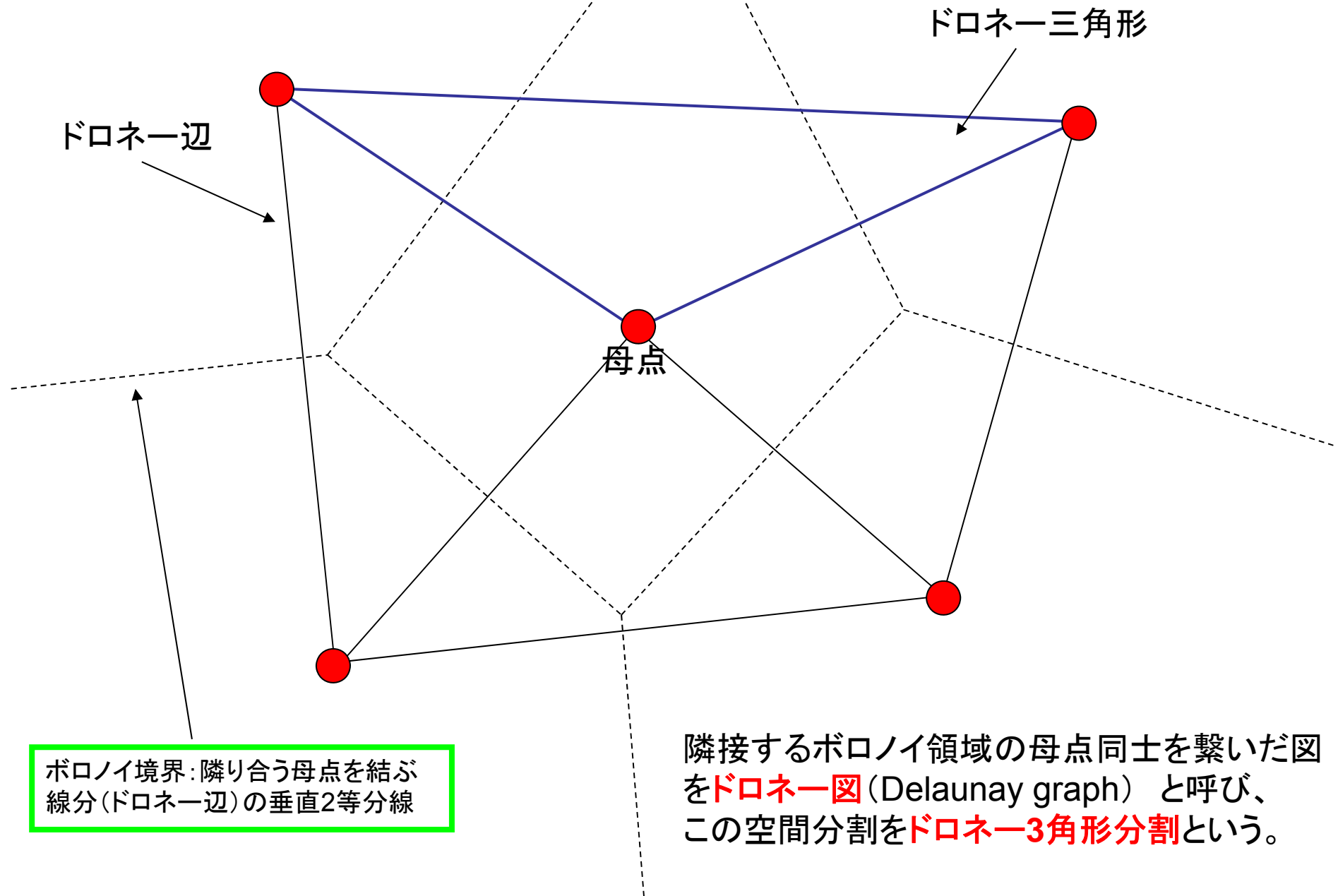
データ群は**まばらで少ない**

データ群 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ が与えられているもとの、
未知なる X_u についての Y_u の値を求める

ただし $X_1 \sim X_n, Y_1 \sim Y_n, X_u, Y_u$ は全て有界な値 (スカラー or ベクトル量)



格子状に並んでいない散布データの扱い(2)

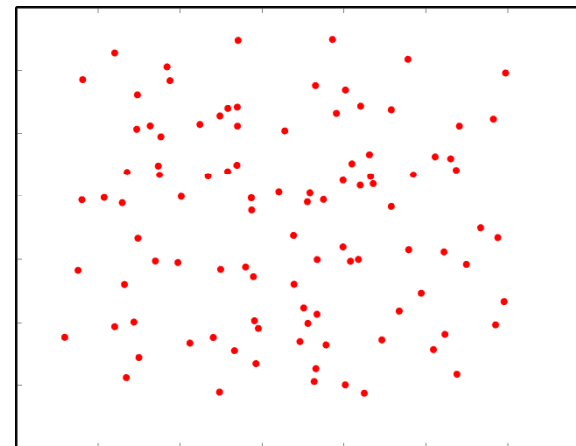


ボロノイ境界: 隣り合う母点を結ぶ線分(ドロネー辺)の垂直2等分線

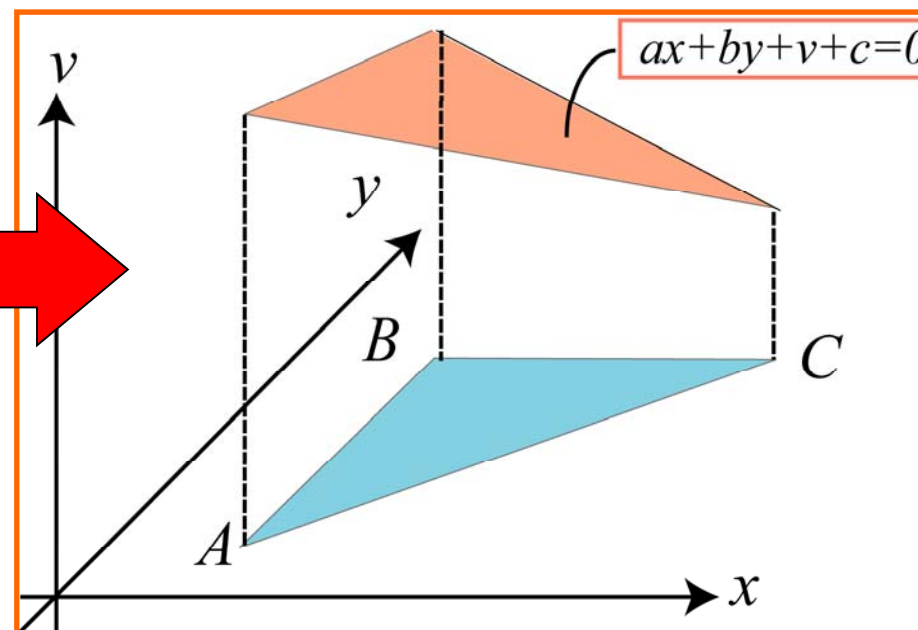
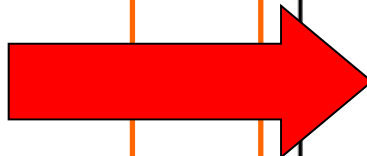
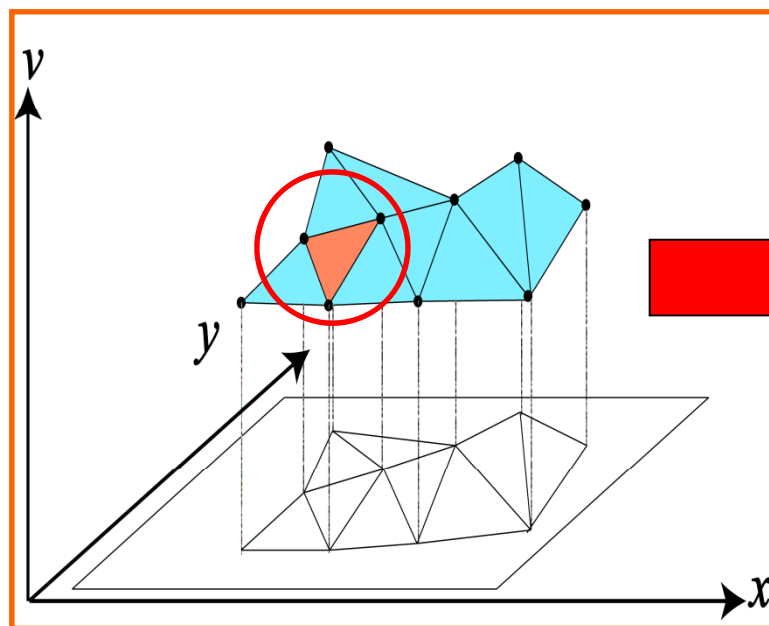
隣接するボロノイ領域の母点同士を繋いだ図をドロネー図 (Delaunay graph) と呼び、この空間分割をドロネー3角形分割という。

格子状に並んでいないデータの扱い

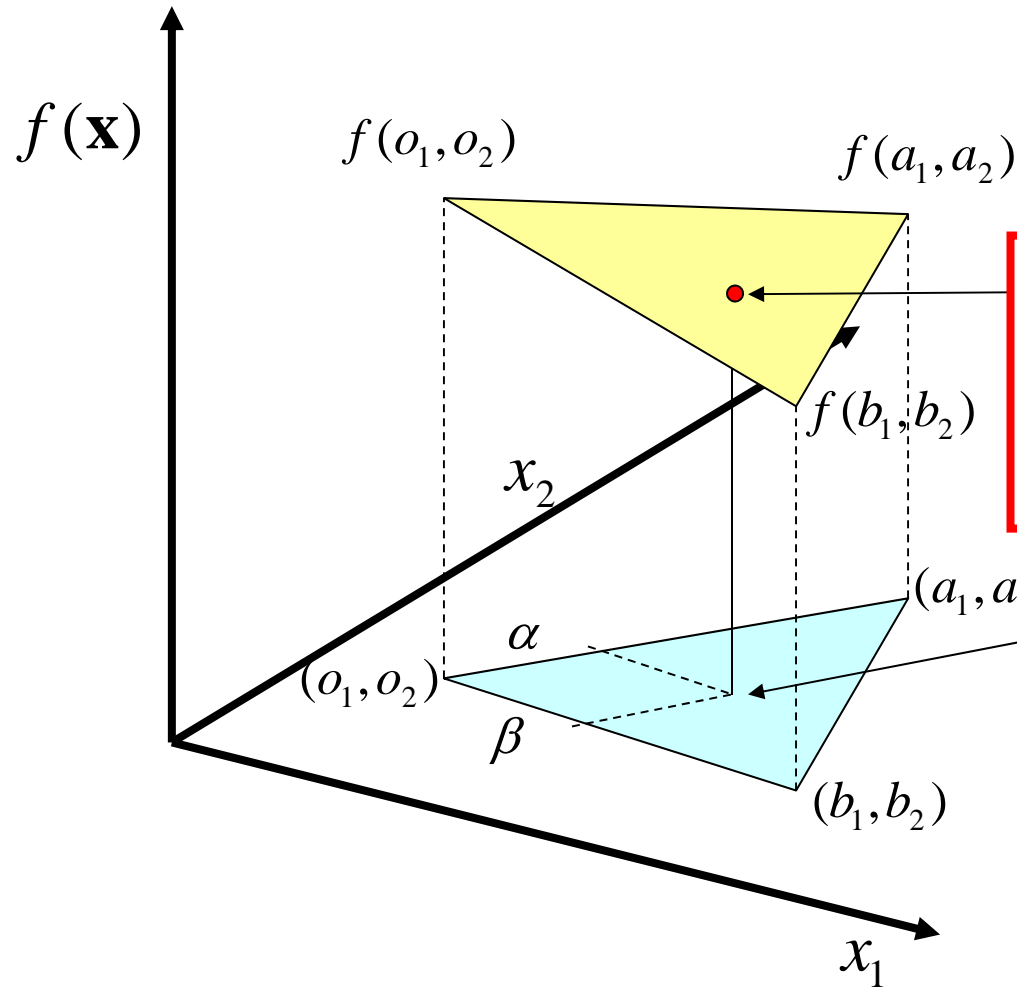
格子状に並んでいない測定データ
が2次元空間上に広がっている場合



3角形パネルに分割して補間



補間の計算方法



(x_1, x_2) この点の関数値を3角形の頂点の関数値の補間により計算する

$$\begin{bmatrix} x_1 - o_1 \\ x_2 - o_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - o_1 & b_1 - o_1 \\ a_2 - o_2 & b_2 - o_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

より、

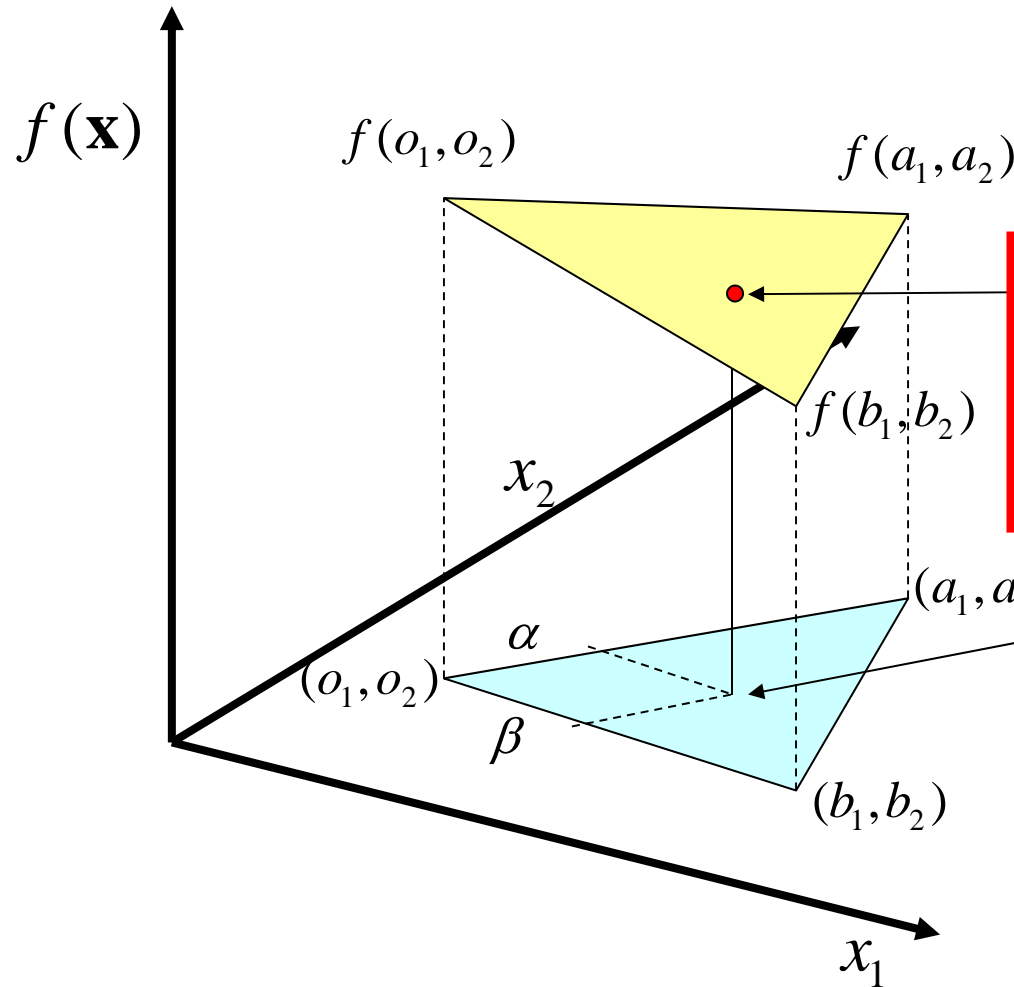
$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - o_1 & b_1 - o_1 \\ a_2 - o_2 & b_2 - o_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - o_1 \\ x_2 - o_2 \end{bmatrix}$$

上記は2次元空間の例だが、
n次元空間でも全く同じ

ただし3角形内部に点がある条件は、
以下の不等式を全て満たすこと:

$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta \leq 1$$

補間の計算方法



$$f(x_1, x_2) = f(o_1, o_2) + \alpha(f(a_1, a_2) - f(o_1, o_2)) + \beta(f(b_1, b_2) - f(o_1, o_2))$$

(x_1, x_2) この点の関数値を3角形の頂点の関数値の補間により計算する

$$\begin{bmatrix} x_1 - o_1 \\ x_2 - o_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - o_1 & b_1 - o_1 \\ a_2 - o_2 & b_2 - o_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

より、

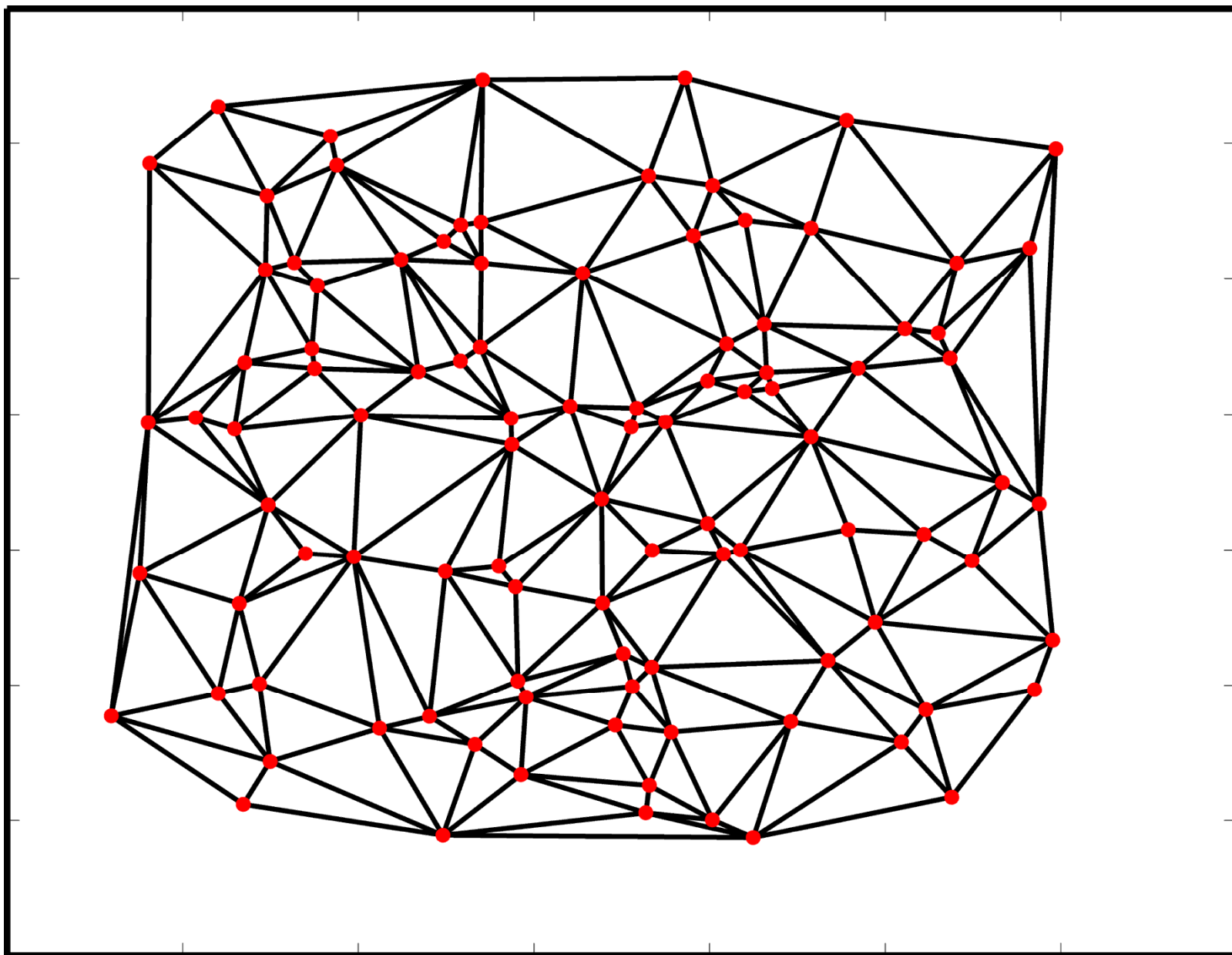
$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - o_1 & b_1 - o_1 \\ a_2 - o_2 & b_2 - o_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - o_1 \\ x_2 - o_2 \end{bmatrix}$$

ただし3角形内部に点がある条件は、以下の不等式を全て満たすこと:

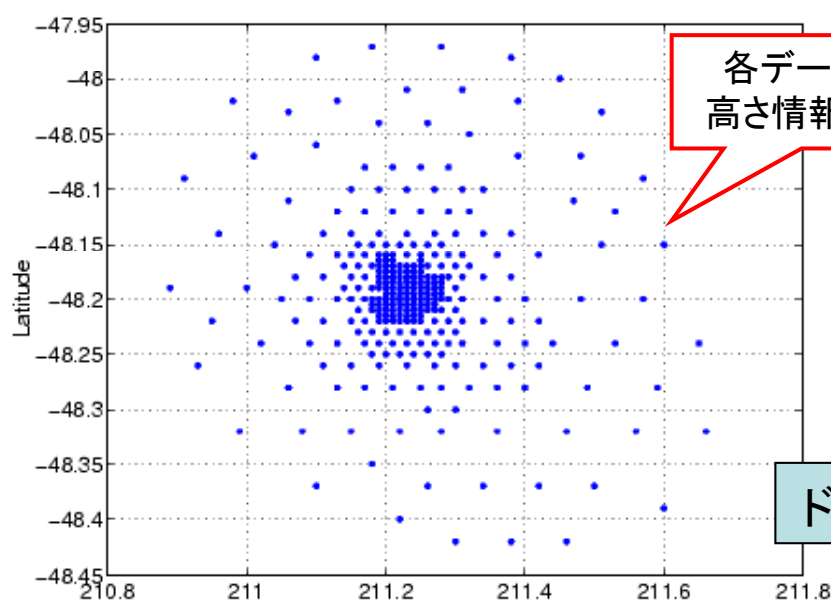
$$0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta \leq 1$$

上記は2次元空間の例だが、
n次元空間でも全く同じ

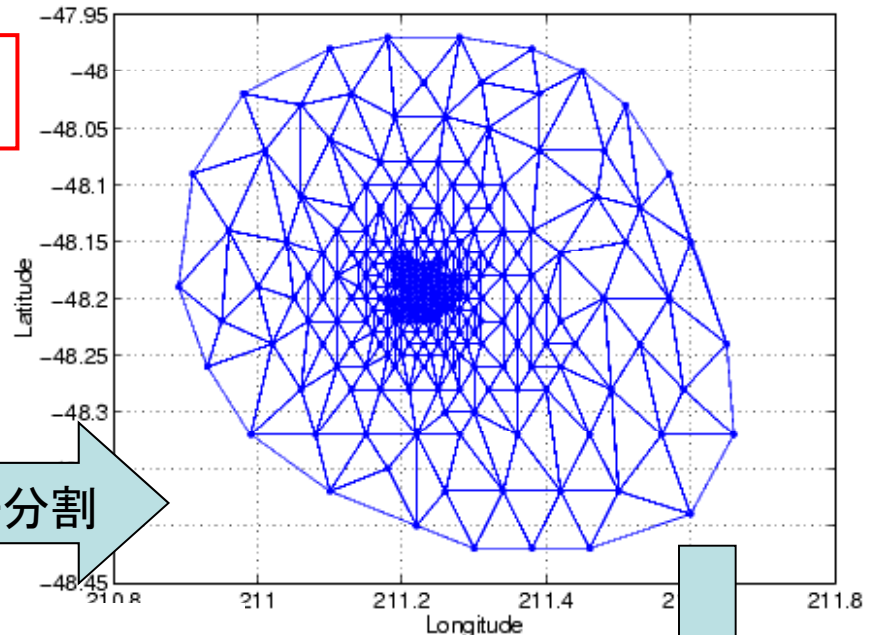
Delaunay三角形分割(ランダム点における)



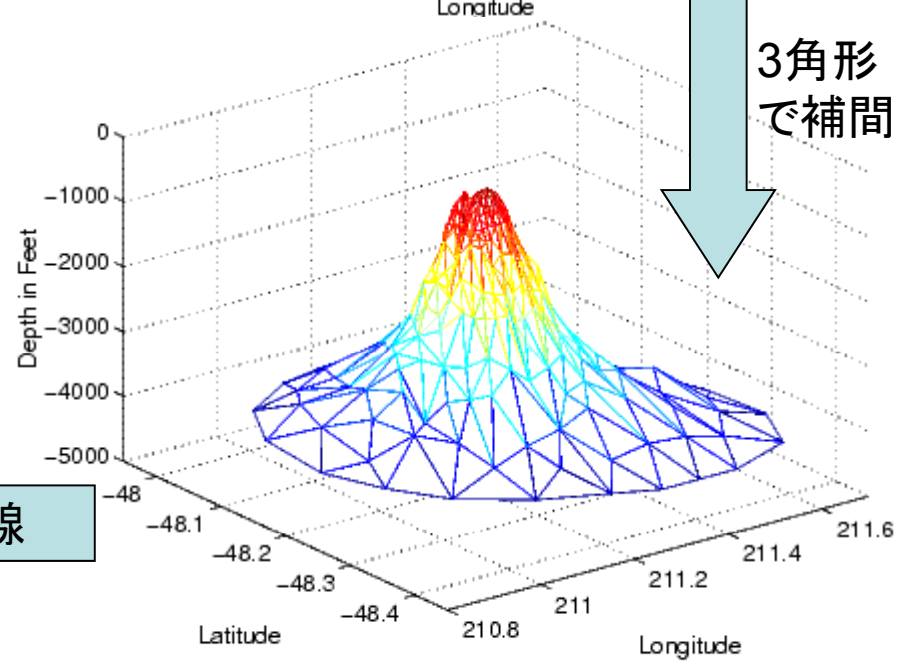
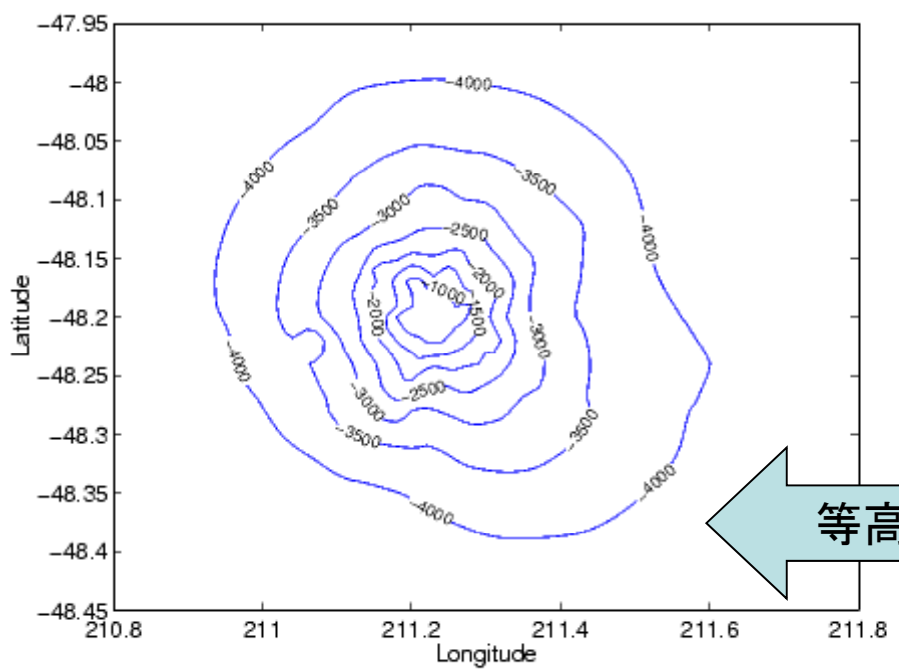
ドローネー図の応用： 散布データの補間



ドローネー分割



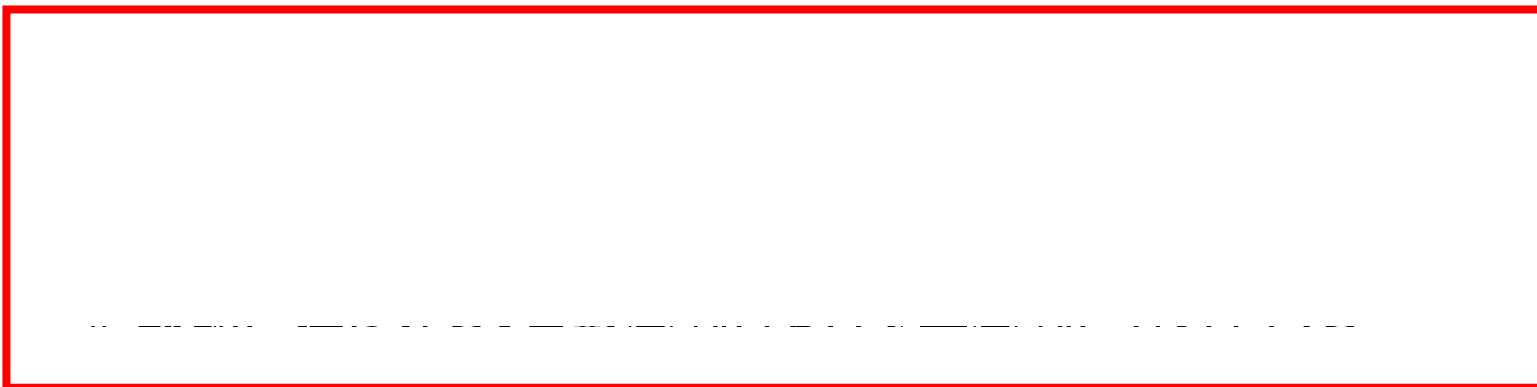
3角形で補間



ドロネー図・ボロノイ図の性質

- ・ドロネー辺の垂直2等分線がボロノイ辺に一致する
- ・ボロノイ分割における各ボロノイ点(ボロノイ分割の多角形の頂点)が、ドロネー分割による3角形の外接円の中心に等しい。
- ・ドロネー3角形の外接円の内部に、他の母点は含まれない
- ・ボロノイ図とドロネー図は**双対**の関係にある

ドロネー図の生成(2次元平面の場合)



- ・逐次添加法など効率の良いアルゴリズムが提案されている。

ドロネー図・ボロノイ図の性質

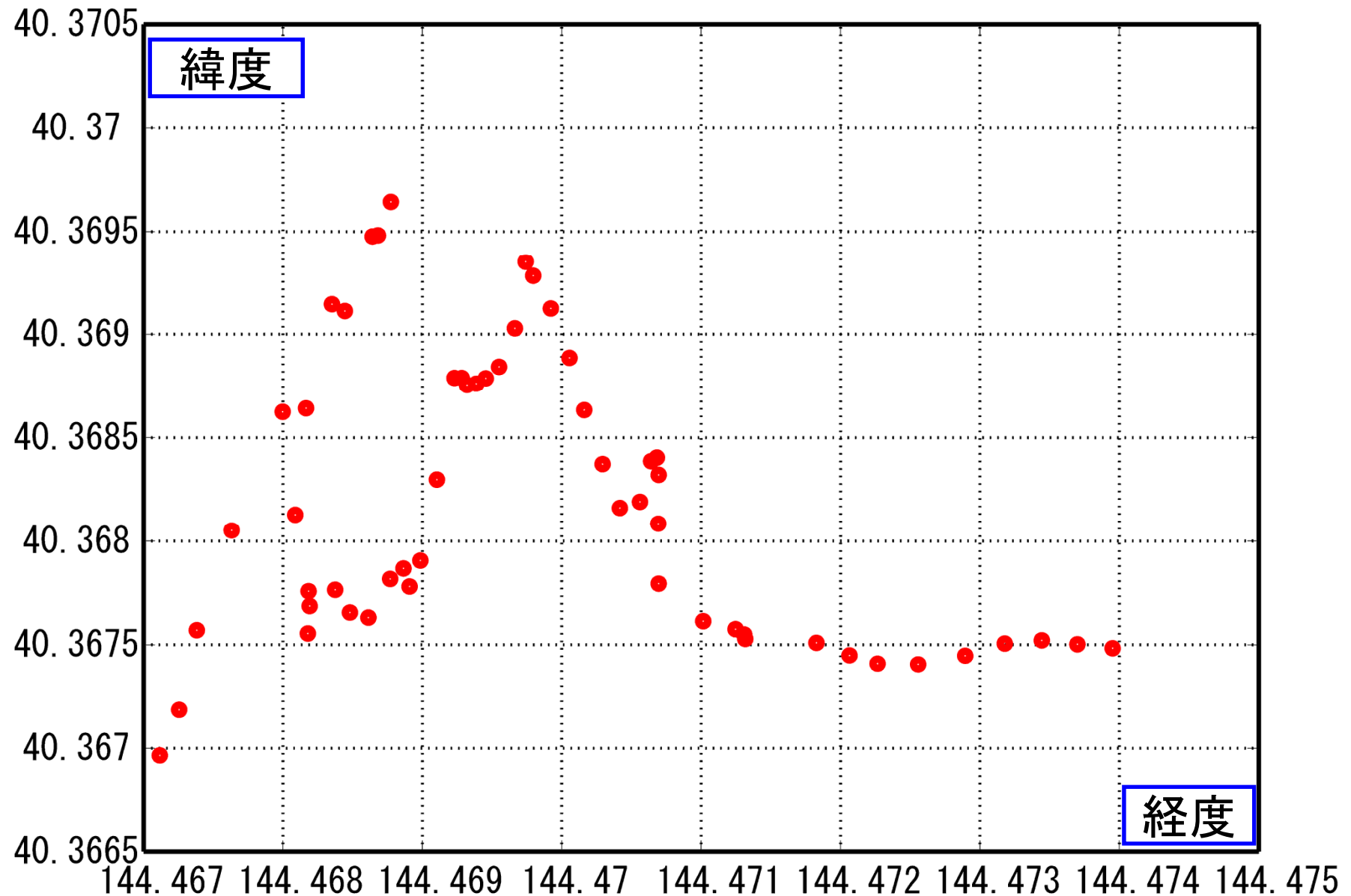
- ・ドロネー辺の垂直2等分線がボロノイ辺に一致する
- ・ボロノイ分割における各ボロノイ点(ボロノイ分割の多角形の頂点)が、ドロネー分割による3角形の外接円の中心に等しい。
- ・ドロネー3角形の外接円の内部に、他の母点は含まれない
- ・ボロノイ図とドロネー図は**双対**の関係にある

ドロネー図の生成(2次元平面の場合)

全ての点の中から3点を選び、その**外接円**を描く。
このとき、**円内にその3点以外の点が含まれなければ、
それらを3角形として結ぶ。**
この作業を全ての3点の組合せについて行ったとき、
最終的に得られる3角形分割はドロネー分割になっている。

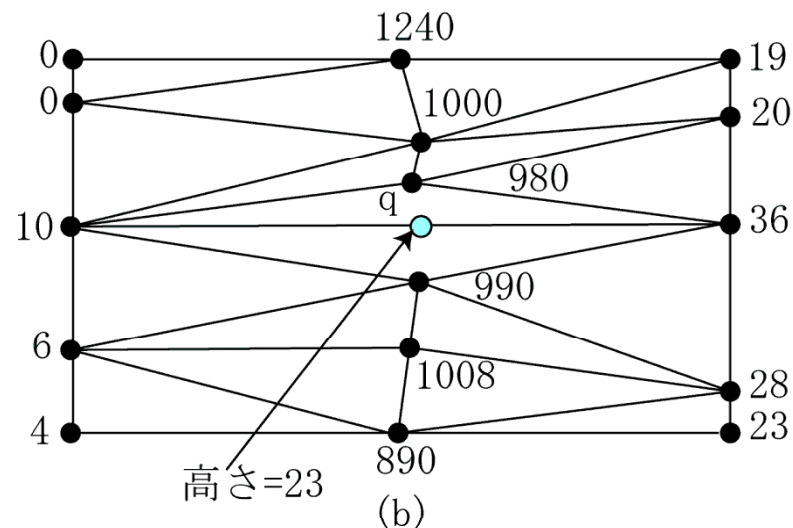
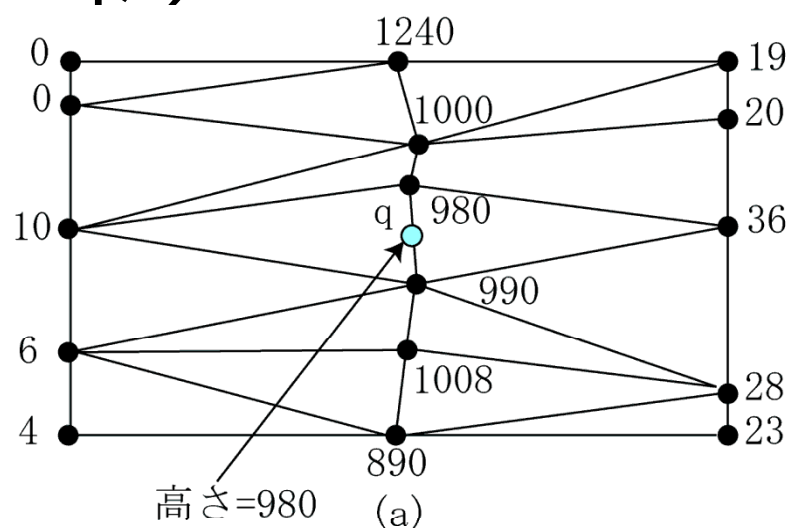
- ・逐次添加法など効率の良いアルゴリズムが提案されている。

実際の潮流計測データ(JAMSTEC提供)



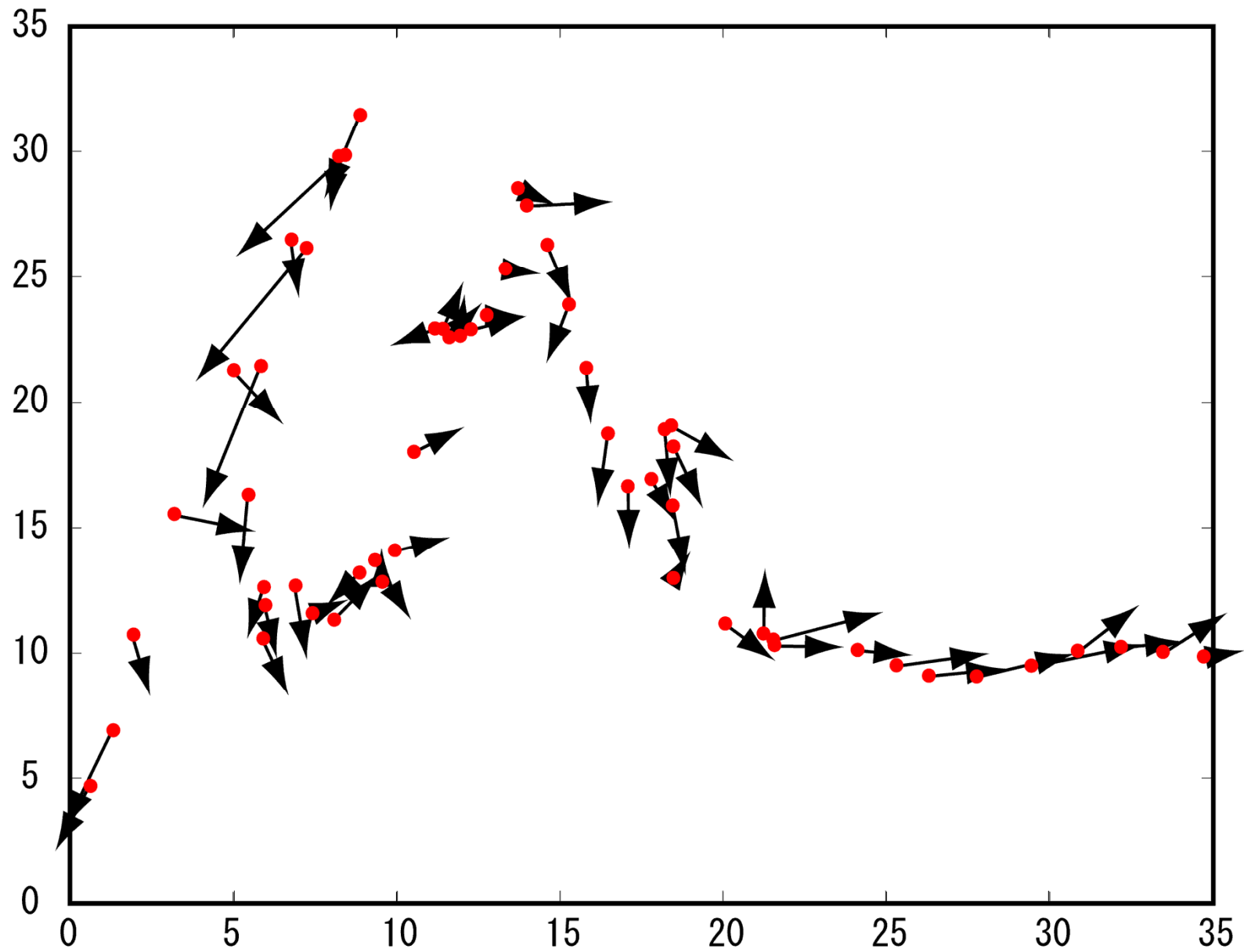
三角形パネル補間法

三角形分割の仕方によって補間した値に大きな差が生じる

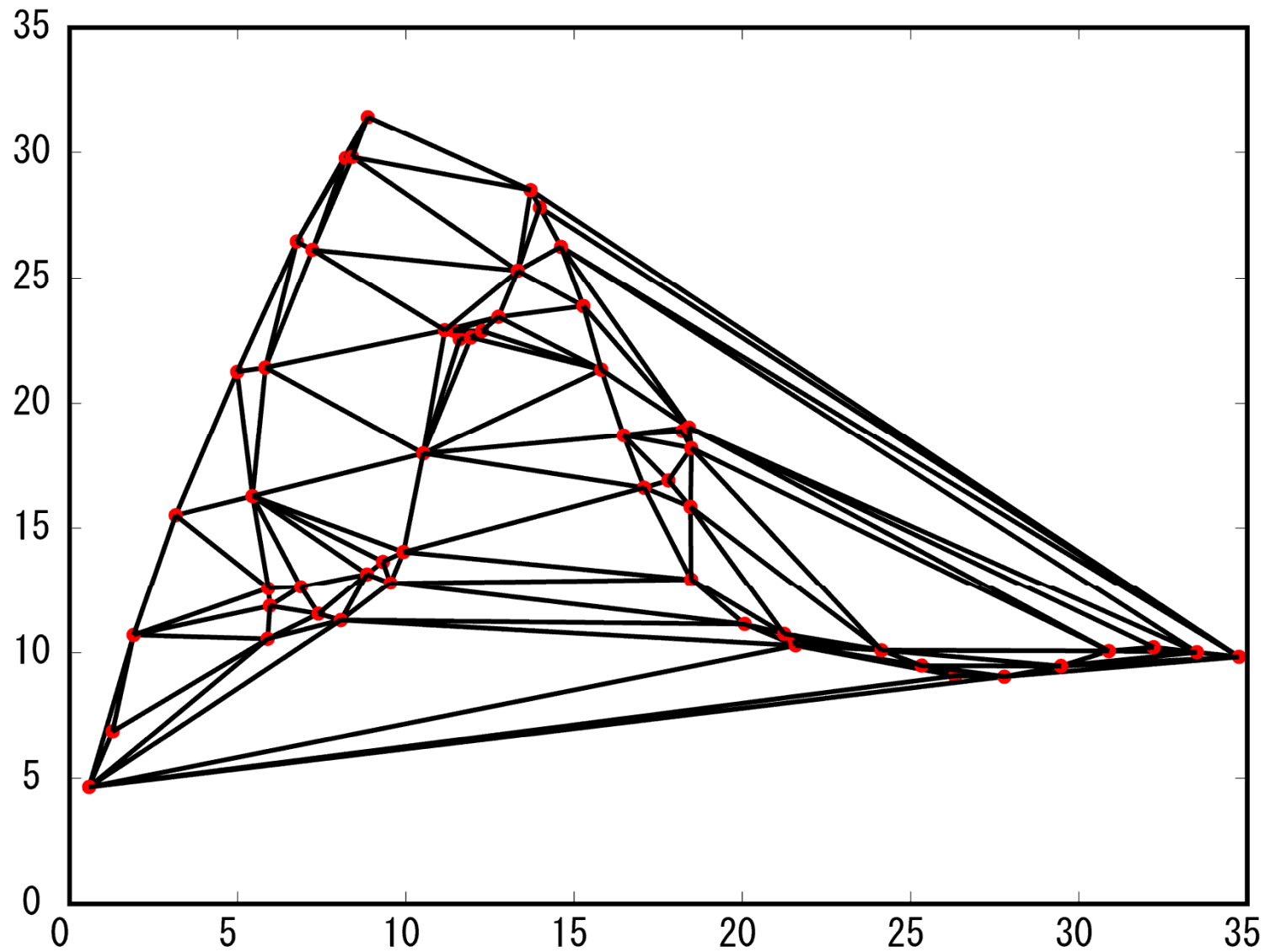


三角形分割の最小角度を最大にする
Delaunay三角形分割を用いる

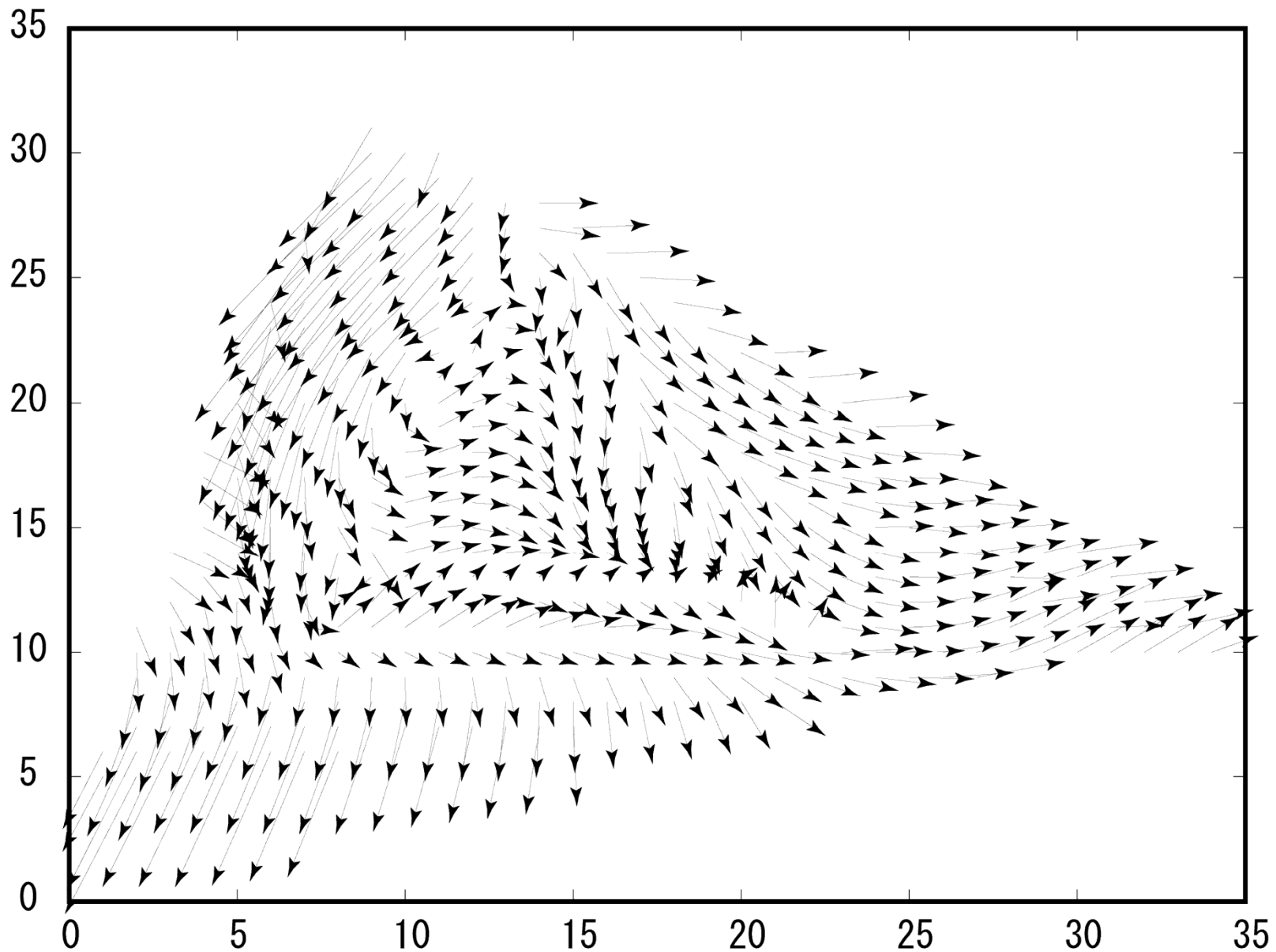
潮流場（観測データ）



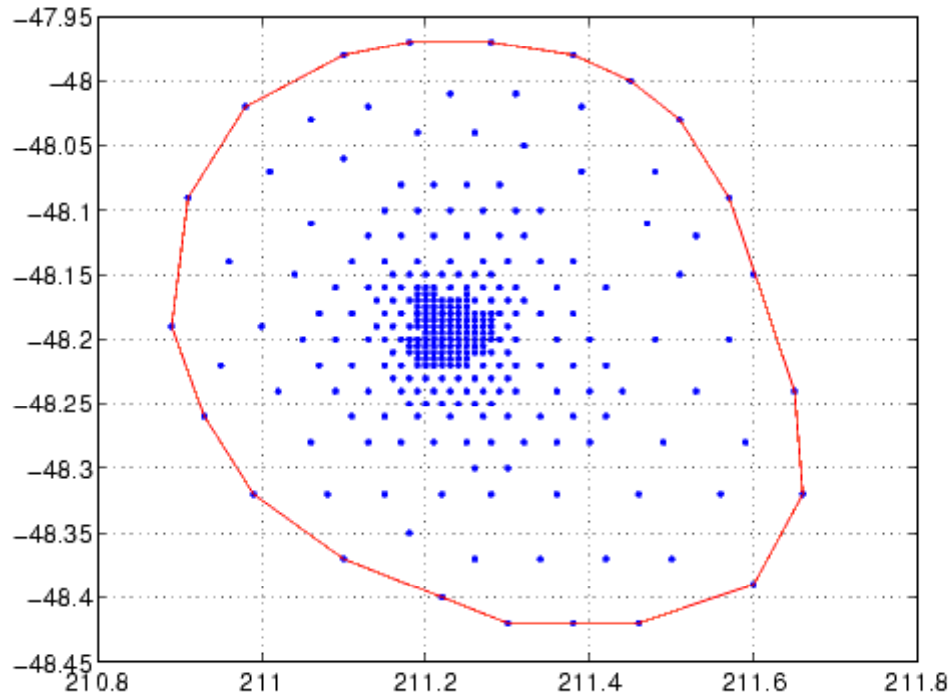
領域をDelaunay分割



未観測領域の潮流を補間



凸包： データ点を全て覆う凸多角形

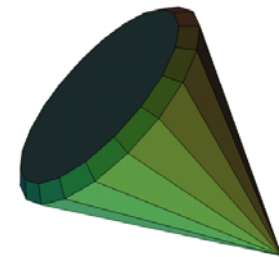


凸包の応用：
クエリー点がデータ点で覆われる
空間の中にあるかどうかを判定
(中にあれば精度良く補間が可能)

多次元空間でのボロノイ分割・ドロネー分割・凸包 を行う計算機プログラム： Qhull

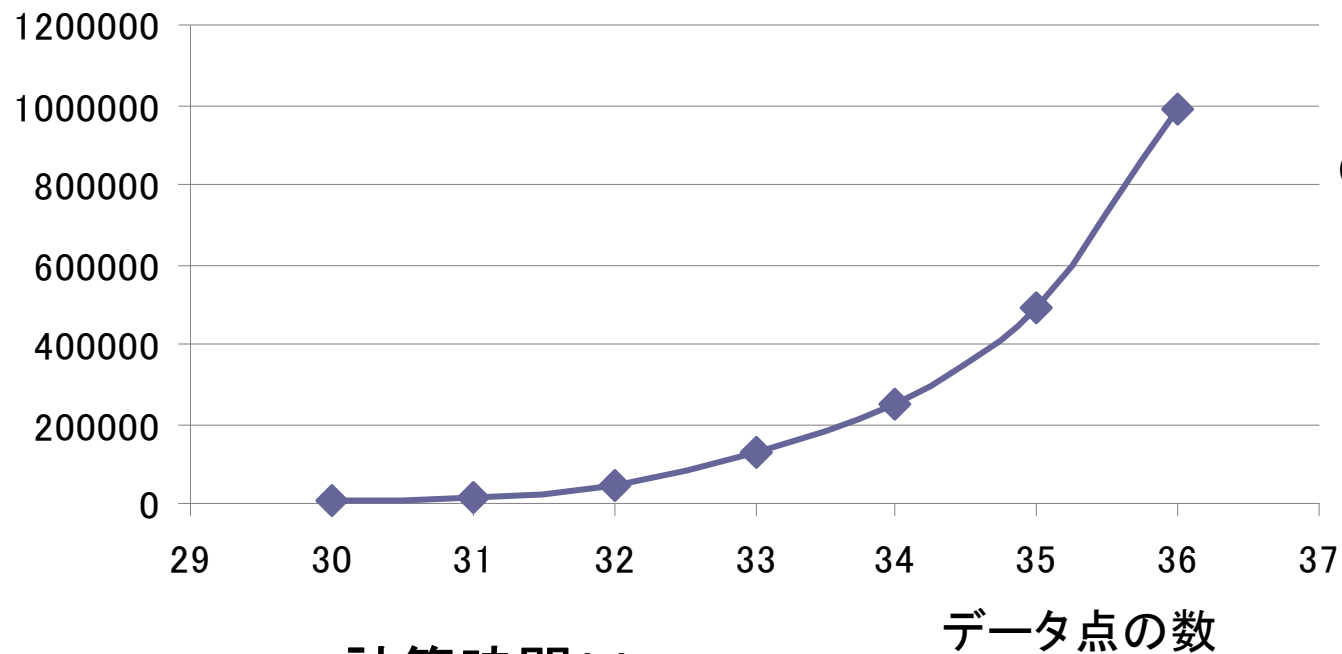
<http://www.qhull.org/>

データを標準入力から入力し、計算結果は標準出力から出力
Windows版やUnix版のバイナリやソースも提供されているのでおすすめ
詳しくは上記サイトを参照

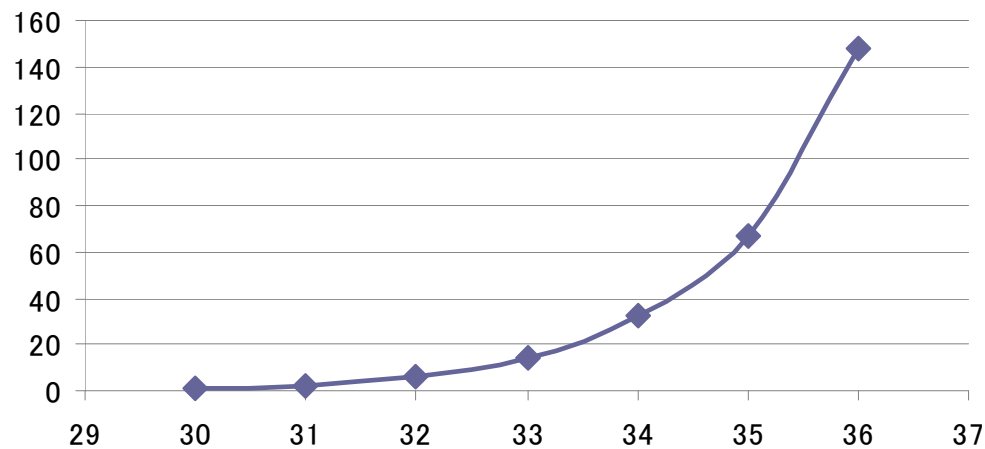


三角形個数

ドロネー分割 の問題点1

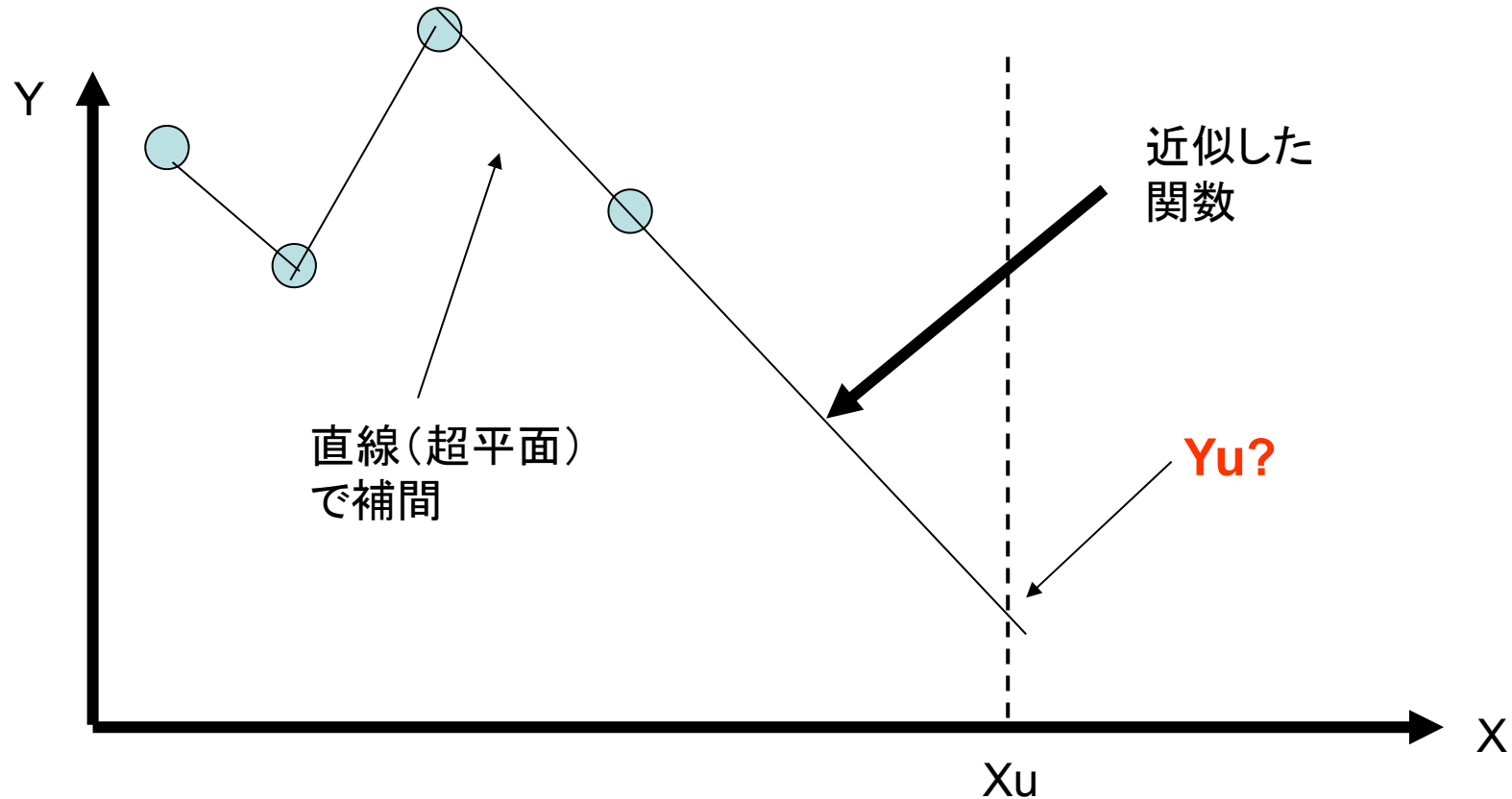


計算時間(s)



次元が増えると
シンプレックス(単体:高次元の3角形)
の数が爆発的に増加し、
計算不能になる

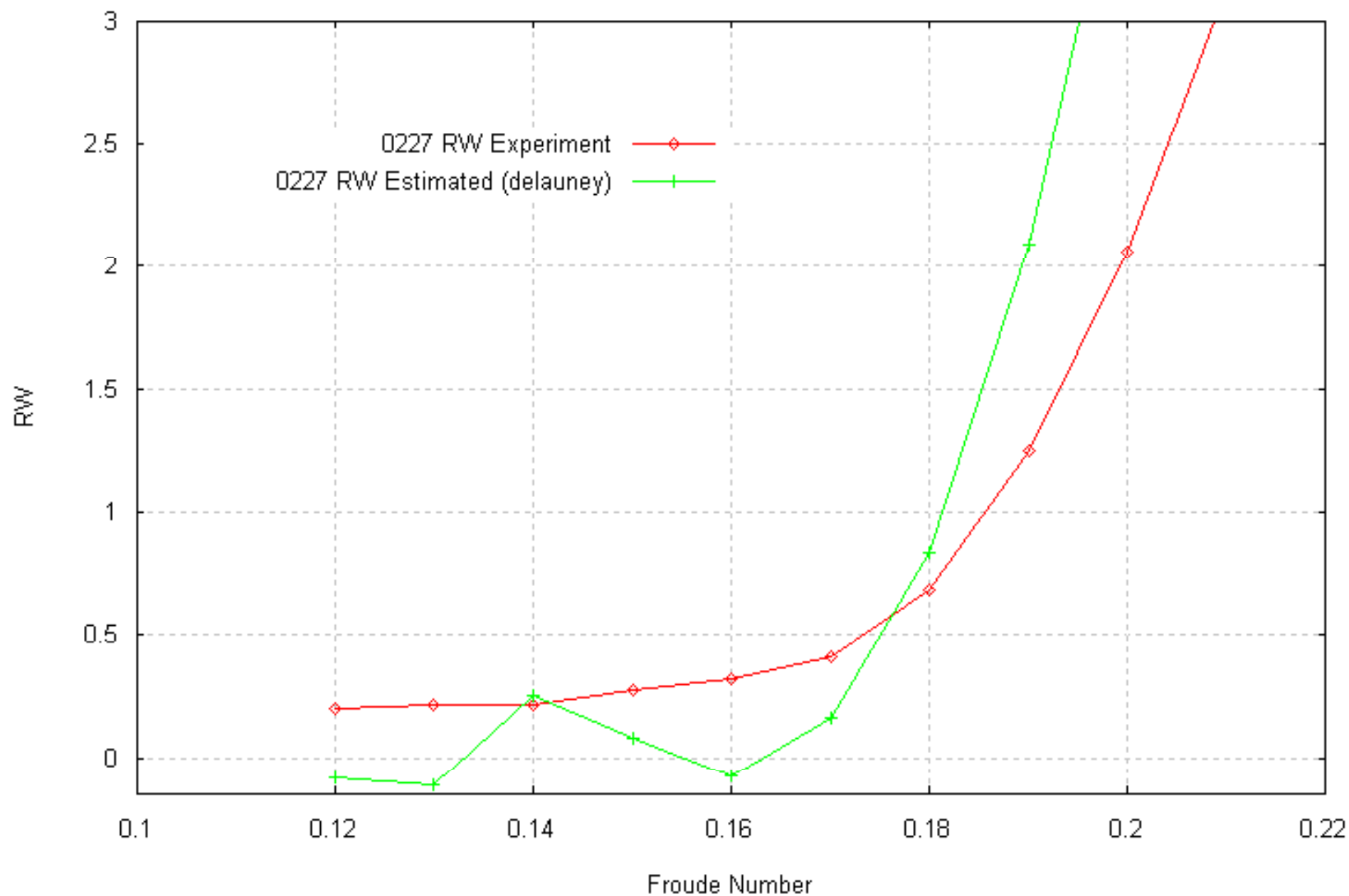
【ドローネー分割法の問題点2】



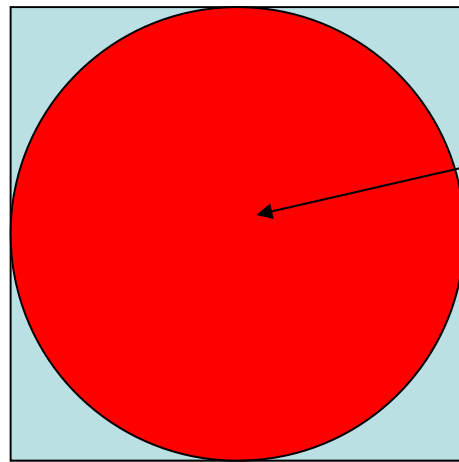
【問題点】

パラメータ空間が高次元だと、クエリーがデータの凸包に入らず、補外になるため近似精度が全く出ない

ドロネー分割法による剰余抵抗推定結果



高次元パラメータ空間においてクエリーがデータ集合の凸包に入らない理由



円(超球)を凸包だと考える

対象領域(1辺が長さ1の超立方体)に占める上記の超球の体積の割合を計算してみる

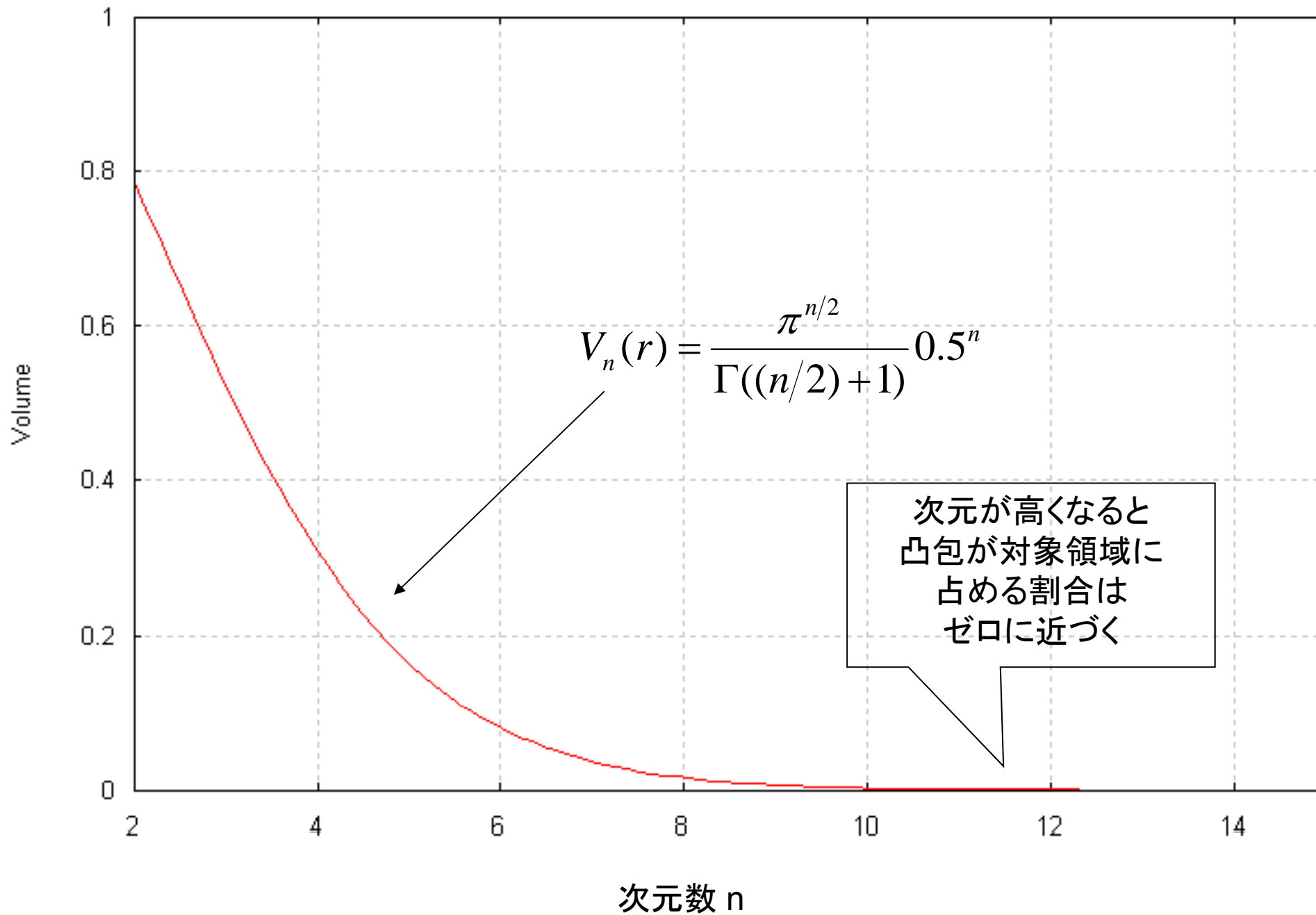
n次元空間における半径 r の球の体積 $V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n/2)+1)} r^n$

・次元数 n が偶数 $n=2m$ の場合

$$V_n(r) = V_{2m}(r) = \frac{2^m \pi^m r^{2m}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2m)} = \frac{\pi^m r^{2m}}{m!}$$

・次元数 n が奇数 $n=2m+1$ の場合

$$V_n(r) = V_{2m+1}(r) = \frac{2^{m+1} \pi^m r^{2m+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}$$



まとめ

- ・多項式曲線・多項式曲面

パラメータ変数を用いた表現
通過点や端点での傾きを指示

- ・スプライン曲線

多項式曲線を多数用いる
接続点での傾きを等しくする

- ・ボロノイ分割

領域に分割: 文字やパターン識別に有効
なめらかな補間には不向き

- ・ドロネー分割

ボロノイの双対・3角形に分割して補間
離散的な高さデータから地形図を作成するような補間計算に有効
高次元空間に対しては不向き

【演習問題】

2016.10.28

学籍番号

氏名

2点 $\mathbf{P}_1 = [0,0,0]$ および $\mathbf{P}_2 = [1,1,0]$ を通り、

点 \mathbf{P}_1 での接線方向ベクトルが $\dot{\mathbf{P}}_1 = [1,0,0]$

点 \mathbf{P}_2 での接線方向ベクトルが $\dot{\mathbf{P}}_2 = [1,0,0]$

で与えられる3次多項式曲線 $\mathbf{P}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3$
の係数ベクトルを全て求めよ。

【演習問題】

学籍番号

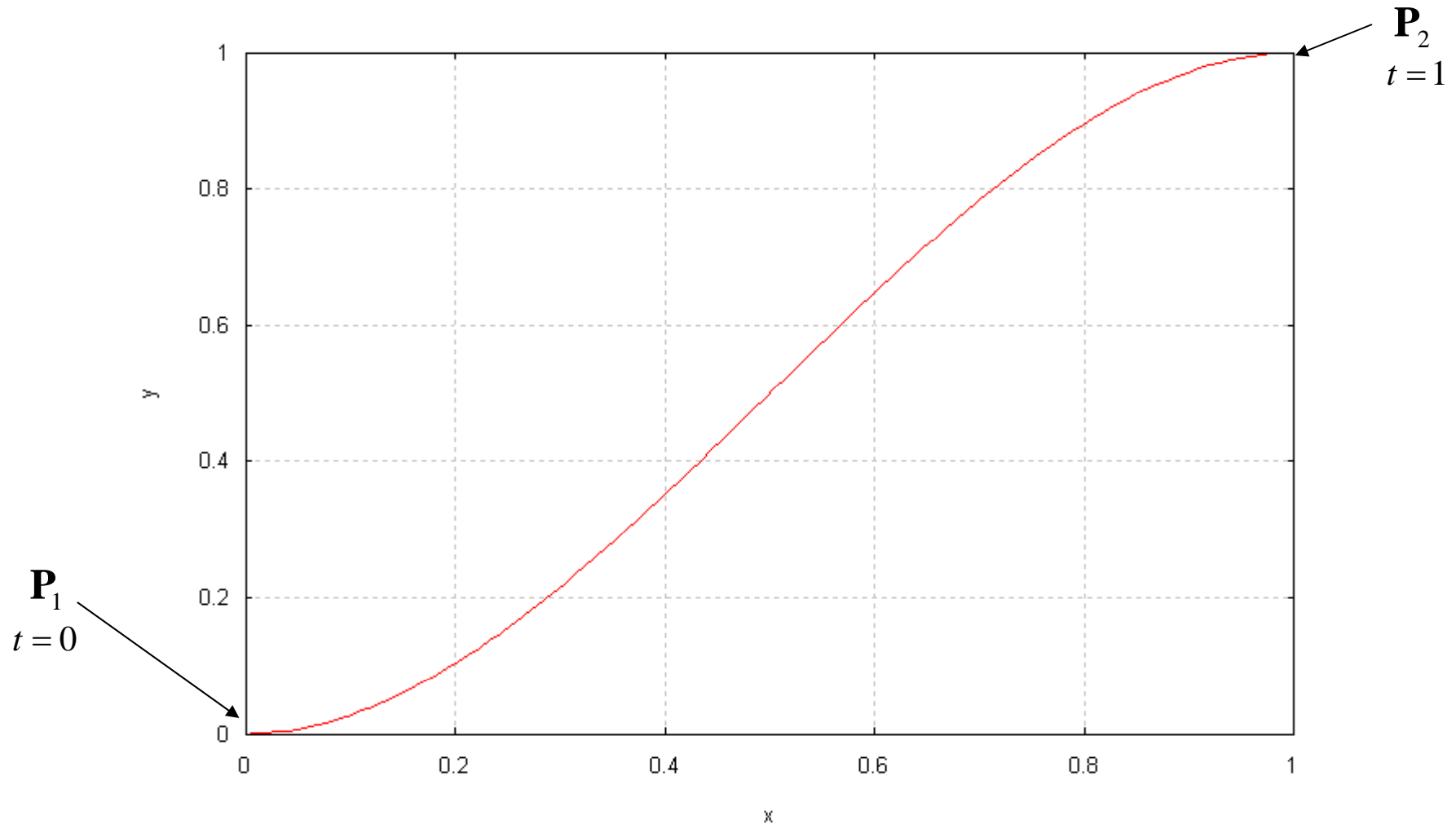
氏名

2点 $P_1 = [0,0,0]$ および $P_2 = [1,1,0]$ を通り、

点 P_1 での接線方向ベクトルが $\dot{P}_1 = [1,0,0]$

点 P_2 での接線方向ベクトルが $\dot{P}_2 = [1,0,0]$

で与えられる3次多項式曲線 $P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3$
の係数ベクトルを全て求めよ。



【演習問題】

学籍番号

氏名

2点 $\mathbf{P}_1 = [0, 0, 0]$ および $\mathbf{P}_2 = [1, 1, 0]$ を通り、

点 \mathbf{P}_1 での接線方向ベクトルが $\dot{\mathbf{P}}_1 = [1, 0, 0]$

点 \mathbf{P}_2 での接線方向ベクトルが $\dot{\mathbf{P}}_2 = [1, 0, 0]$

で与えられる3次多項式曲線 $\mathbf{P}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3$
の係数ベクトルを全て求めよ。

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t^2 - 2t^3 \\ z = 0 \end{cases}$$

【演習問題】

学籍番号

氏名

2点 $\mathbf{P}_1 = [0,0,0]$ および $\mathbf{P}_2 = [1,1,0]$ を通り、

点 \mathbf{P}_1 での接線方向ベクトルが $\dot{\mathbf{P}}_1 = [1,0,0]$

点 \mathbf{P}_2 での接線方向ベクトルが $\dot{\mathbf{P}}_2 = [1,0,0]$

で与えられる3次多項式曲線 $\mathbf{P}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)] = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3$
の係数ベクトルを全て求めよ。

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t^2 - 2t^3 \\ z = 0 \end{cases}$$

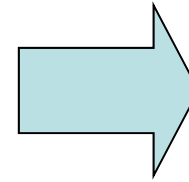
よって

$$\mathbf{a}_0 = [0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{a}_1 = [1 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{a}_2 = [0 \ 3 \ 0]$$

$$\mathbf{a}_3 = [0 \ -2 \ 0]$$



$$y = 3x^2 - 2x^3$$

$$z = 0$$

