九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

システム設計工学 （担当：木村）

（9） マルコフ過程（状態遷移行列・極限分布）

場所：船1講義室

http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html

マルコフ過程(Markov Process)によるモデル化

●問題のモデル化とは？
解くべき問題を単純化し，本質だけを抽出すること

●マルコフ過程で何をモデル化できるか？
状態遷移に不確実性を伴う問題 システムの費用や時間見積もり、設備スペック検討
例） 在庫管理，配送計画問題，生産システム管理問題，ロボット

●マルコフ過程によるモデル化のメリットは？
膨大な数理解析の知見を利用できる
1） 最適性・最適解の保証
2） 最小限の計算コストで解を求める方法論がある

「マルコフ過程によるモデル化」と
「マルコフ過程の解法」を会得すれば，一端のOR専門家かも

マルコフ過程(Markov Process)の基本概念

システムの$\boxed{}$と$\boxed{}$

システムの$\boxed{}$は、いくつかの変数の値によって定義される

システムの$\boxed{}$が、ある状態に指定された値から他の状態に指定された値に変わるとき「システムが状態遷移した」という。

状態遷移の確率は、そのときの状態に依存する。
（過去の履歴には依存しない：マルコフ性）

Andrei A. Markov
1856－1922

マルコフ過程(Markov Process)の基本概念

システムの状態と遷移

システムの状態は、いくつかの変数の値によって定義される

システムの状態が、ある状態に指定された値から他の状態に指定された値に変わるとき「システムが状態遷移した」という。

状態遷移の確率は、そのときの状態に依存する。
（過去の履歴には依存しない：マルコフ性）

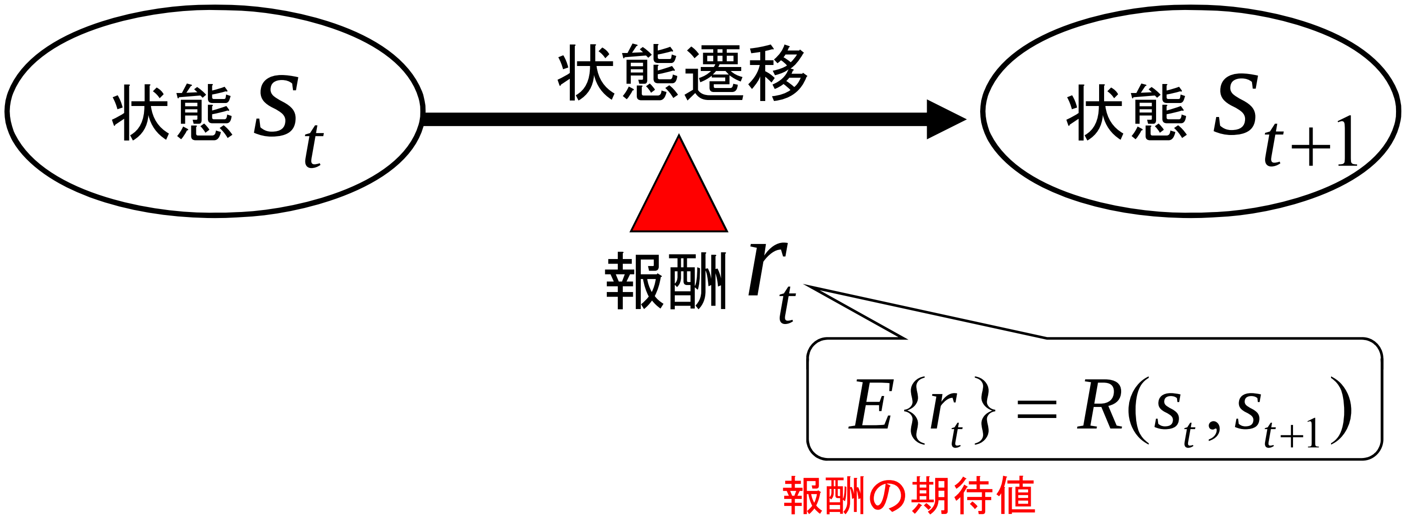
Andrei A. Markov
1856－1922

マルコフ過程(Markov Process)とは？

S :状態の集合

Pr(s’|s) :状態 s のもとで、s’へ遷移する

$R(s,s')$:状態 s から s’ へ遷移したときの報酬（またはコスト）の条件付期待値

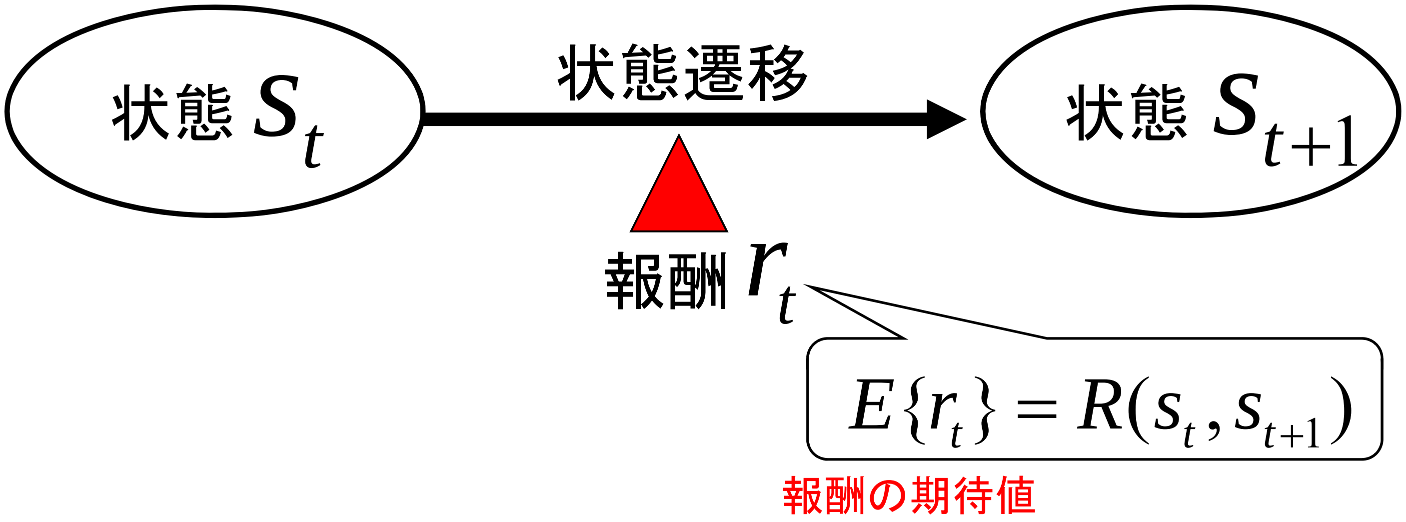


マルコフ過程(Markov Process)とは？

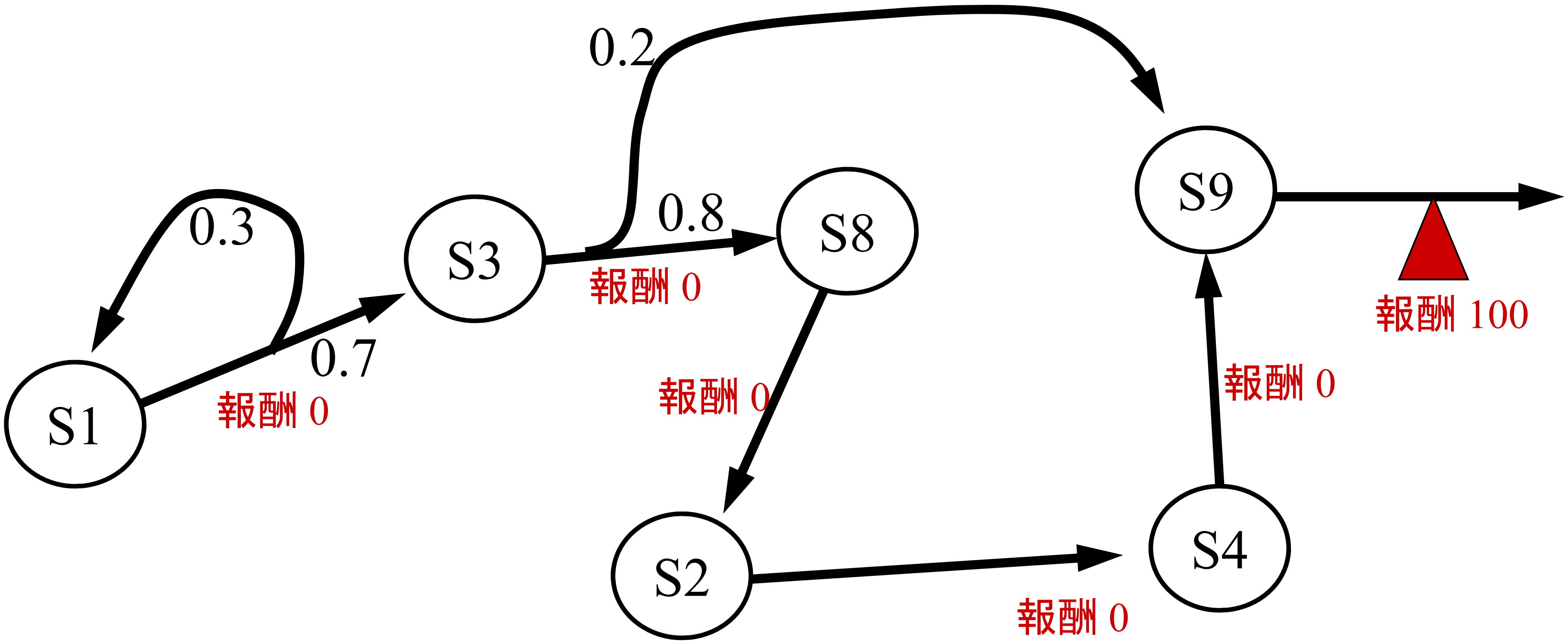
S　　　　:状態の集合

Pr(s’|s)　:状態 s のもとで、s’へ遷移する　**条件付確率**

$R(s, s')$　:状態 s から s’ へ遷移したときの報酬（またはコスト）の条件付期待値



マルコフ過程の状態遷移の例



状態遷移行列

遷移先状態S'へ遷移する確率

状態S
より

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathrm{S1} & \mathrm{S2} & \cdots & \mathrm{Sn} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{S1} \\ \mathrm{S2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{Sn} \end{array} & \begin{bmatrix} \Pr(s_1 \mid s_1) & \Pr(s_2 \mid s_1) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_1) \\ \Pr(s_1 \mid s_2) & \Pr(s_2 \mid s_2) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pr(s_1 \mid s_n) & \Pr(s_2 \mid s_n) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_n) \end{bmatrix} \end{array}$$

- 各要素は必ず0以上1以下
- 各行の要素を全て合計すると必ず1になる

状態分布行列

状態S2に存在する確率

状態S1に存在する確率

状態Snに存在する確率

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

例１） 全ての状態に等しい確率で存在するとき

例2） 状態S1にのみ存在するとき

状態分布行列

状態S1に存在する確率

状態S2に存在する確率

状態Snに存在する確率

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

例1） 全ての状態に等しい確率で存在するとき

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

例2） 状態S1にのみ存在するとき

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

1ステップ遷移後の状態分布の計算

（注 : Trans = 転置）

初期状態分布　状態遷移行列

1ステップ後の状態分布

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ \vdots \\ x_n(1) \end{bmatrix}^{Trans} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}^{Trans} \begin{bmatrix} \Pr(s_1 \mid s_1) & \Pr(s_2 \mid s_1) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_1) \\ \Pr(s_1 \mid s_2) & \Pr(s_2 \mid s_2) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pr(s_1 \mid s_n) & \Pr(s_2 \mid s_n) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(1) \quad = \mathbf{x}(0) \ \ \mathbf{P}$$

---

nステップ遷移後の状態分布の計算

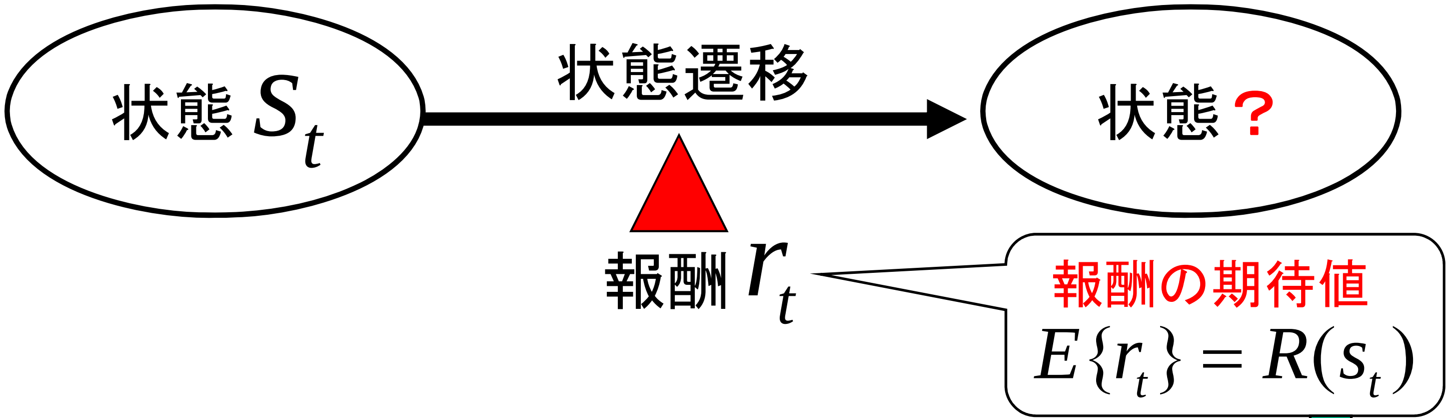
初期状態分布　状態遷移行列

nステップ後の状態分布

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_n(n) \end{bmatrix}^{Trans} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}^{Trans} \begin{bmatrix} \Pr(s_1 \mid s_1) & \Pr(s_2 \mid s_1) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_1) \\ \Pr(s_1 \mid s_2) & \Pr(s_2 \mid s_2) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pr(s_1 \mid s_n) & \Pr(s_2 \mid s_n) & \cdots & \Pr(s_n \mid s_n) \end{bmatrix}^n$$

$$\mathbf{x}(n) \quad = \mathbf{x}(0) \ \ \mathbf{P}^n$$

報酬は状態遷移に伴って発生する



報酬行列　報酬の期待値は1×nの行列になる

遷移先の全ての状態について合計

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_1) R(s_1, s_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_2) R(s_2, s_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_n) R(s_n, s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \\ \vdots \\ R(s_n) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{状態S1の報酬の期待値} \\ \leftarrow \text{状態S2の報酬の期待値} \\ \\ \leftarrow \text{状態Snの報酬の期待値} \end{array}$$

「マルコフ性」とは？

状態 s‘ への遷移が，そのときの状態 s にのみ依存し，
それ以前の状態には関係ないこと。

「エルゴード性」とは？

任意の状態sからスタートし，無限時間経過した後の
状態分布確率が最初の状態とは無関係になること。
この極限の状態分布 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ は「定常分布」と呼ばれる。

（ただしエルゴード的なマルコフ過程は既約で非周期的という
必要十分条件を満たす必要がある）

定常分布 $\begin{cases} \mathbf{a} = \\ \quad = \end{cases}$

平均報酬：

定常分布を求める方程式

$\mathbf{a}$ は $\mathbf{P}^{Trans}$ の固有値1の固有ベクトル

「マルコフ性」とは？

状態 s‘ への遷移が，そのときの状態 s にのみ依存し，
それ以前の状態には関係ないこと。

「エルゴード性」とは？

任意の状態sからスタートし，無限時間経過した後の
状態分布確率が最初の状態とは無関係になること。
この極限の状態分布 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ は「定常分布」と呼ばれる。

（ただしエルゴード的なマルコフ過程は既約で非周期的という
必要十分条件を満たす必要がある）

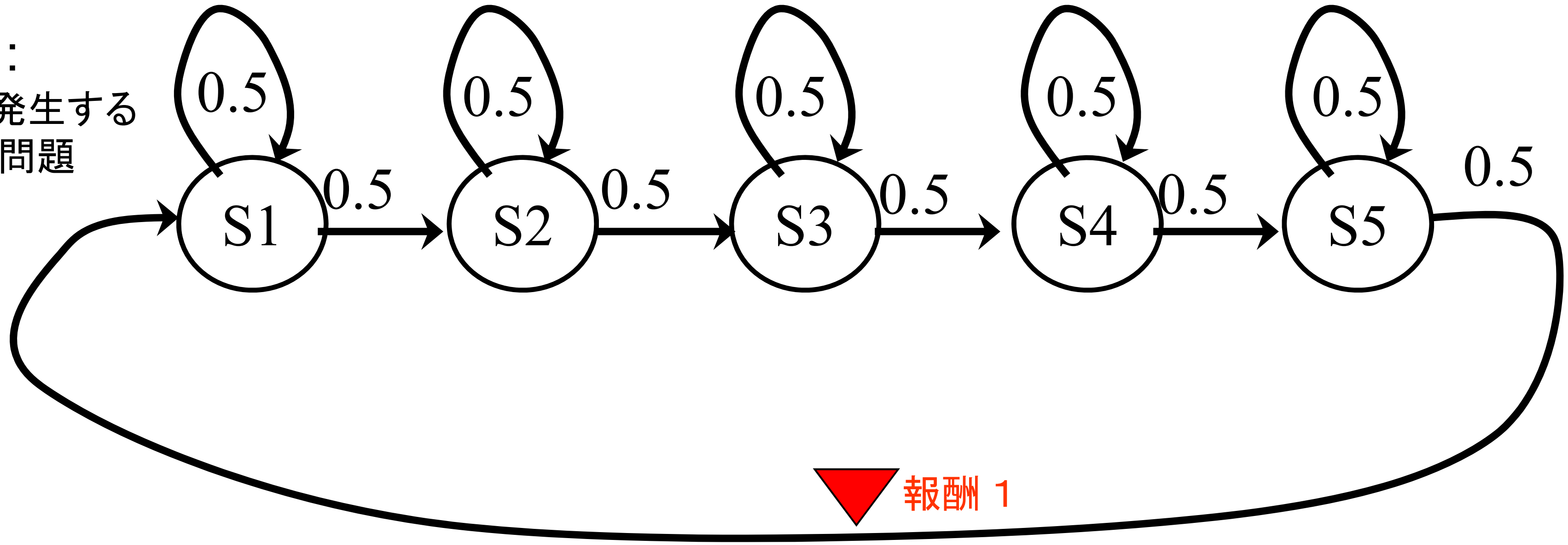
$$\text{定常分布} \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}(0)\ \mathbf{P}^{\infty} \\ \quad = \mathbf{a}\ \mathbf{P} \end{cases}$$

平均報酬： $\mathbf{a}\,\mathbf{R}$

定常分布を求める方程式

$\mathbf{a}$ は $\mathbf{P}^{Trans}$ の固有値1の固有ベクトル

例題1：
手直しの発生する
工程管理問題

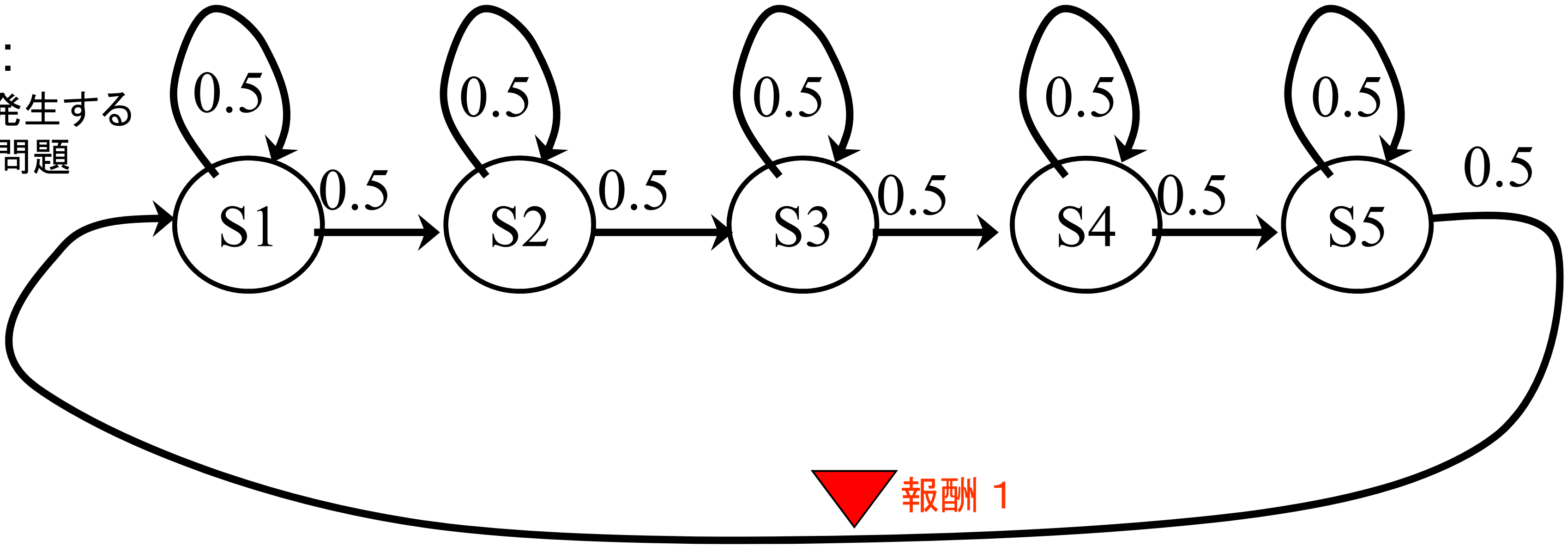


1）状態遷移行列を求めよ

2）報酬行列を求めよ

3）状態S1からスタートした場合、1ステップ後および2ステップ後、3ステップ後の
状態の確率分布を計算せよ。

例題1：
手直しの発生する
工程管理問題



1）状態遷移行列を求めよ

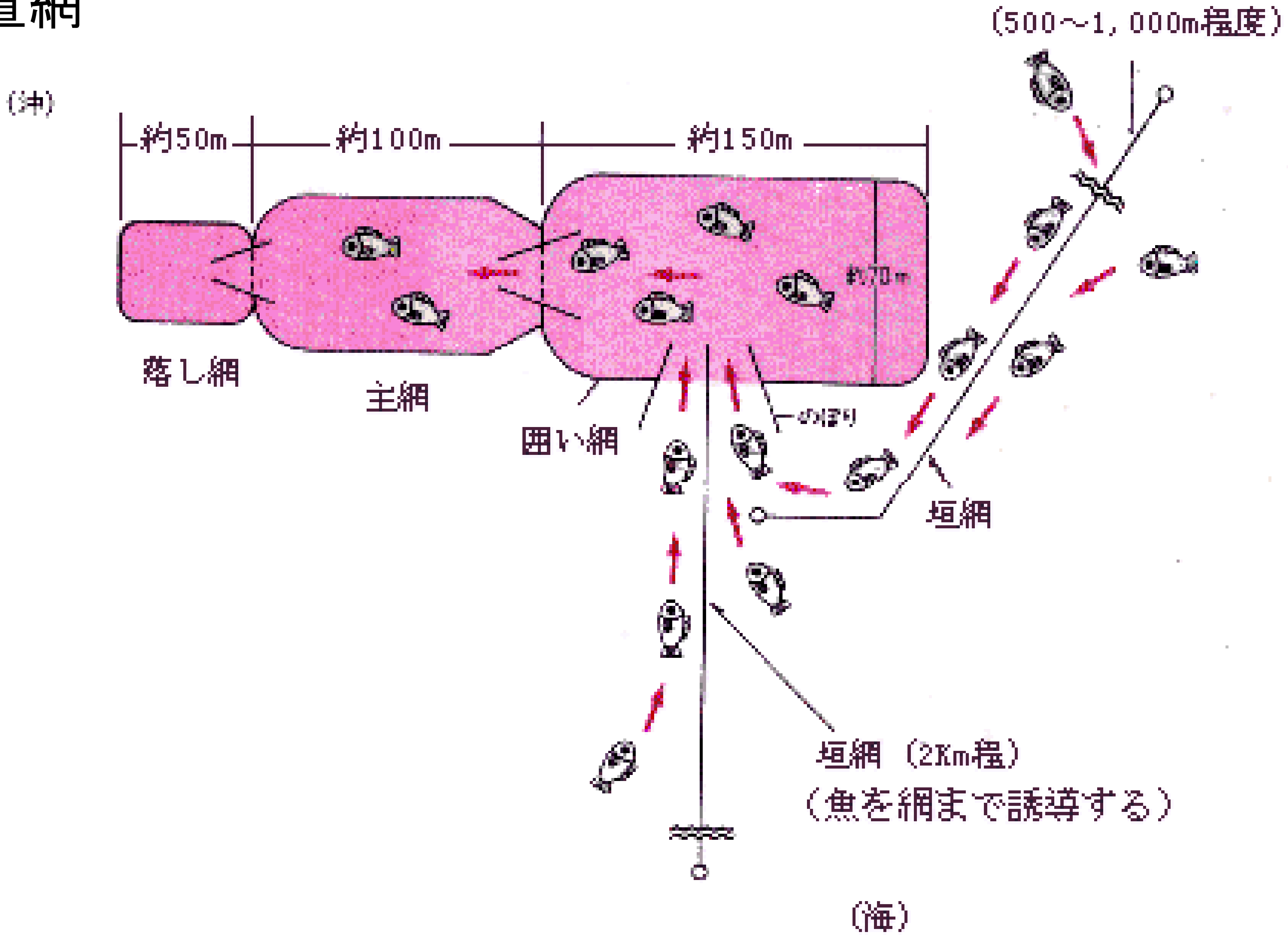
2）報酬行列を求めよ

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

3）状態S1からスタートした場合、1ステップ後および2ステップ後、3ステップ後の状態の確率分布を計算せよ。　状態の重心が1ステップあたり0.5ずつ右へ移動

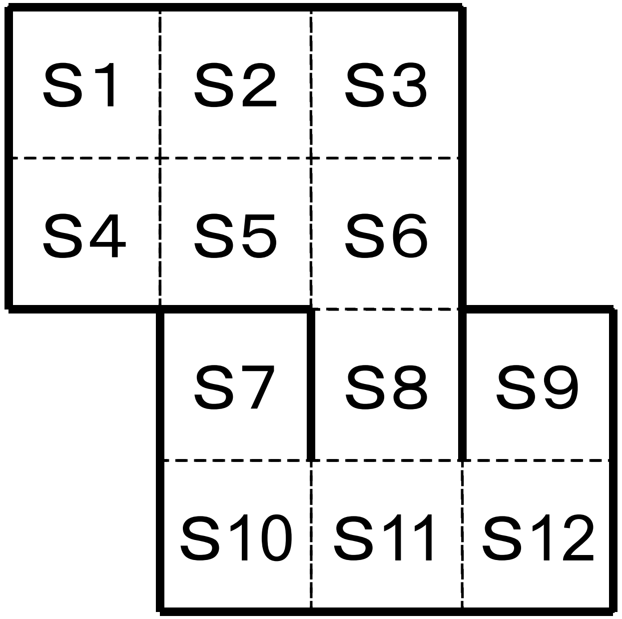
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{Trans} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \mathbf{X}_0\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{Trans} \quad \mathbf{X}_0\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{Trans} \quad \mathbf{X}_0\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.375 \\ 0.375 \\ 0.125 \\ 0 \end{bmatrix}^{Trans}$$

定置網

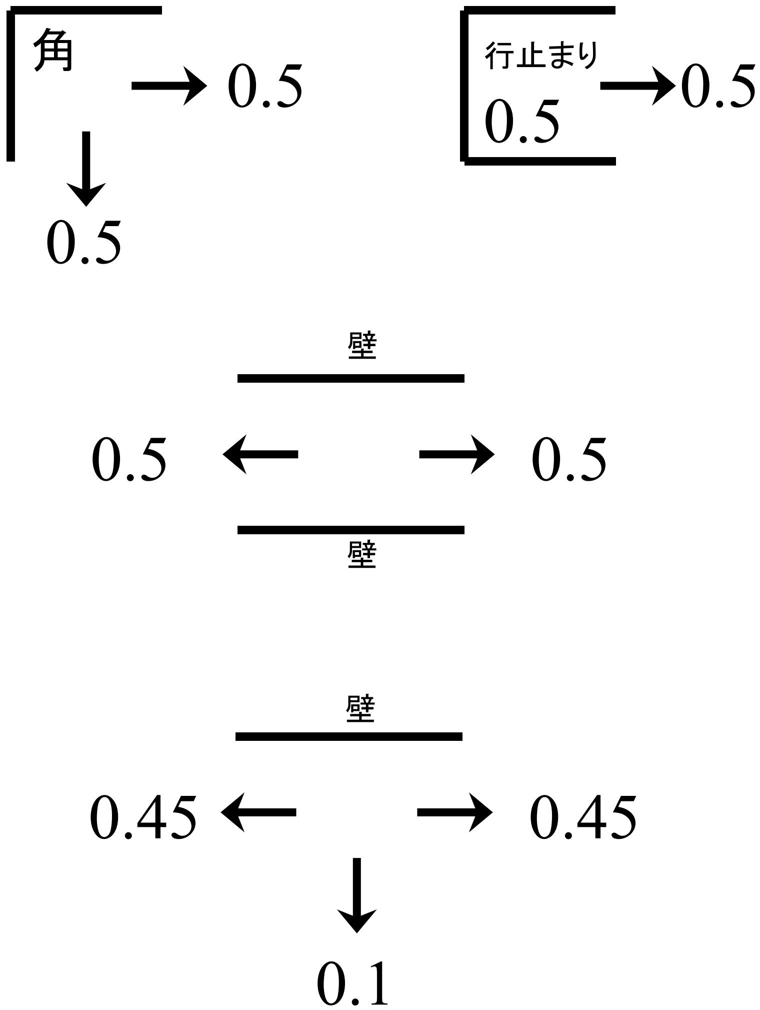


(500～1,000m程度)
(沖)
約50m
約100m
約150m
約70m
落し網
主網
囲い網
のぼり
垣網
垣網 (2Km程)
(魚を網まで誘導する)
(海)

定置網の簡易モデル



魚の移動の性質



１）状態遷移行列を求めよ

２）状態S１からスタートした場合、
　１ステップ後および2ステップ後、3ステップ後の
　状態の確率分布を計算せよ。

定置網の簡易モデルの状態遷移行列

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
S1												
S2												
S3												
S4												
S5												
S6												
S7												
S8												
S9												
S10												
S11												
S12												

定置網の簡易モデルの状態遷移行列

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
S1		0.5		0.5								
S2	0.45		0.45		0.1							
S3		0.5				0.5						
S4	0.5				0.5							
S5		0.1		0.45		0.45						
S6			0.45		0.1			0.45				
S7							0.5			0.5		
S8						0.5					0.5	
S9									0.5			0.5
S10							0.5				0.5	
S11								0.1		0.45		0.45
S12									0.5		0.5	

20 step 後の状態分布

0.0042	0.1832	0.0016	
0.1295	0.0049	0.1997	
	0.0947	0.0061	0.0947
	0.0546	0.1803	0.0546

黄色の領域
＝0.4789

40 step 後の状態分布

0.0120	0.0524	0.0192	
0.0355	0.0091	0.0663	
	0.1532	0.0276	0.1532
	0.1439	0.1837	0.1439

黄色の領域
＝0.7780

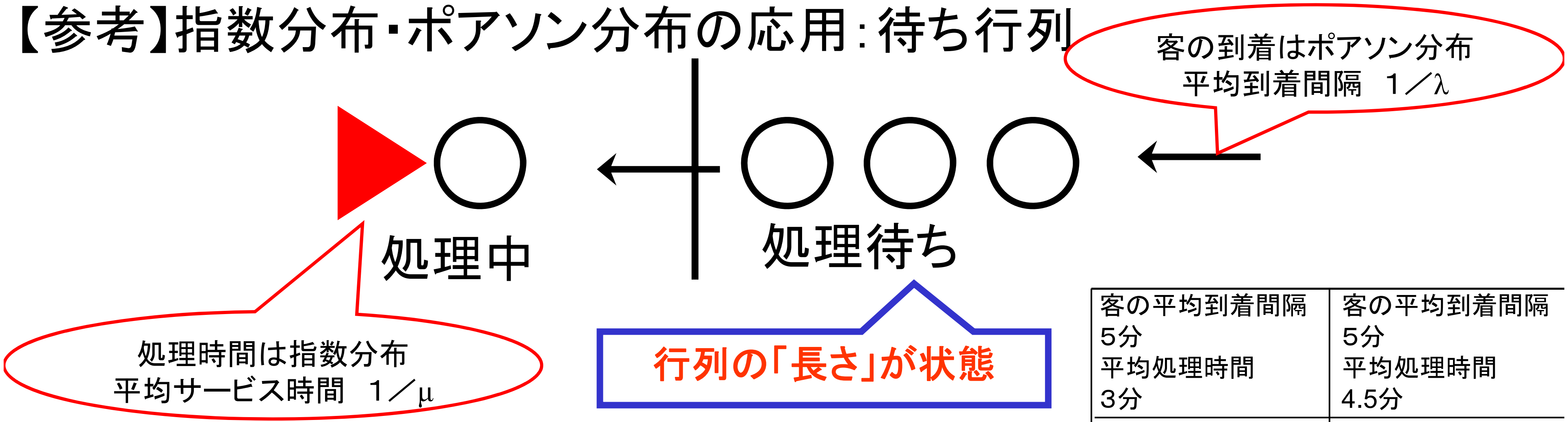
100 step 後の状態分布

0.0221	0.0253	0.0316	
0.0162	0.0163	0.0380	
	0.1591	0.0365	0.1591
	0.1600	0.1759	0.1600

黄色の領域
＝0.8140

【注意】
このモデルは、魚が複数存在する場合の影響を考慮していない

【参考】指数分布・ポアソン分布の応用：待ち行列



		客の平均到着間隔 5分 平均処理時間 3分	客の平均到着間隔 5分 平均処理時間 4.5分
サービス中を含む客の数がゼロである確率 （待たずにサービスが受けられる確率	$1-\lambda/\mu$		
サービス中を含む客の平均人数	$\dfrac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}$	1.5人	9人
サービスを待っている客の平均人数	$\dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^2}{1-\lambda/\mu}$		
到着してからサービスを受けて去るまでの平均時間	$\dfrac{1}{\mu-\lambda}$	7.5分	45分

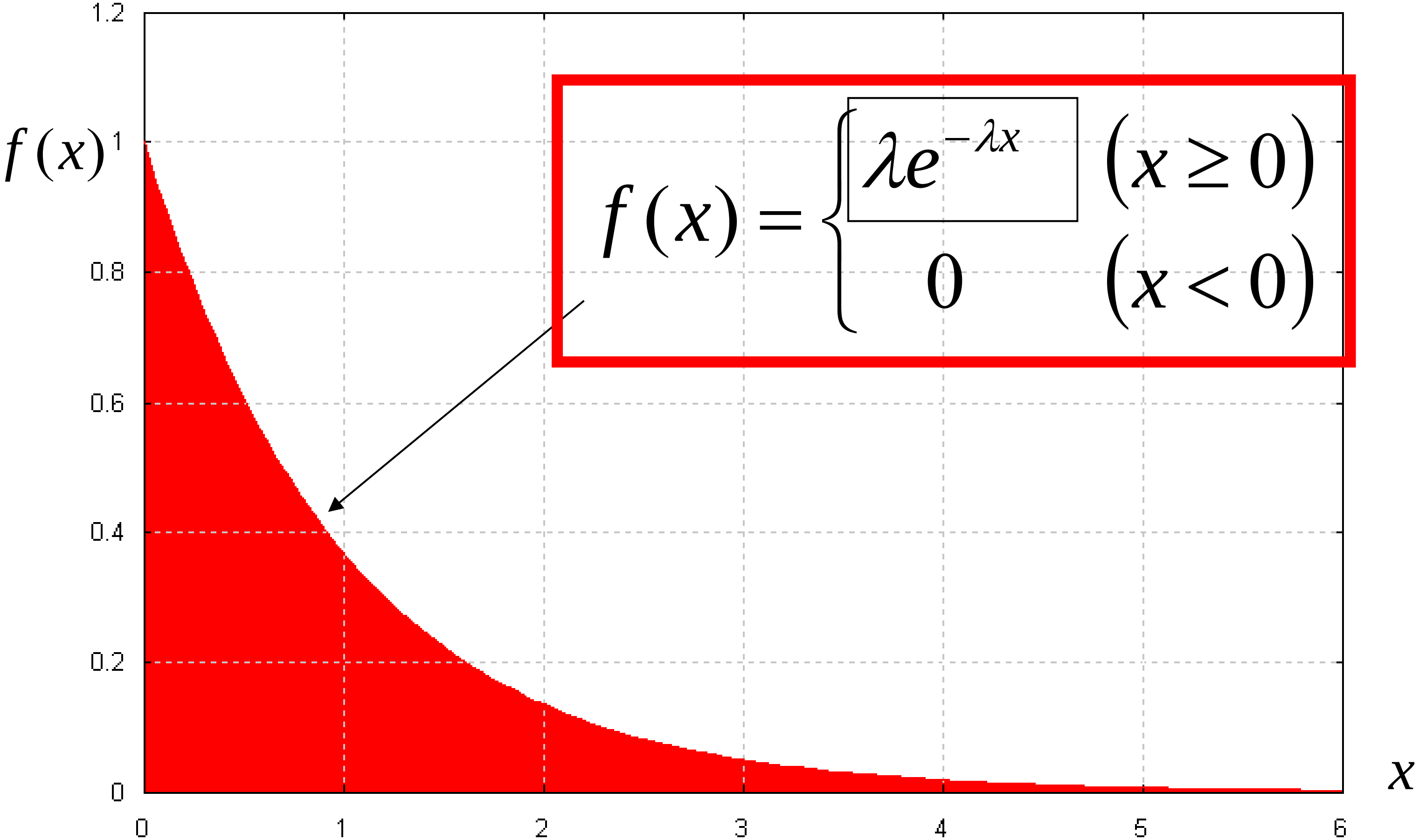
代表的な連続形分布関数：指数分布

exponential distribution

λ ：平均到着（故障）率（人／時）

機械が偶発的に故障するまでの時間の分布や
客が訪れる時間間隔などのモデルによく用いられる

$1/\lambda$ ：平均到着（故障）時間間隔



$$f(x) = \begin{cases} \boxed{\lambda e^{-\lambda x}} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

【復習】 確率変数のとりうる値が離散かつ無限個の場合

ポアソン分布(Poisson distribution)

発生時間間隔は
指数分布

単位時間あたり平均で λ 回発生する事象が、

単位時間に x 回(ゼロを含む)発生する確率

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

ポアソン分布の現れる例:

備考: $x=0$ のとき $x!=1$

●1分間に放射性物質から放射される粒子が平均2個観測されるとき、
　1分間に1個も観測されない確率は?

●ある地域において、年間の交通事故件数が平均730件のとき、
　1日に発生する事故の件数が0件である確率は?

●ある機械で部品を 10000個作ると、平均 5個の不良品ができるとき、
部品を 1000個作ったときに不良品が0個である確率は?　不良品が1個出る確率は?

指数分布 と **ポアソン分布** は密接に関係している

λ :平均到着(故障)率(人/時)　$\Leftrightarrow$　$1/\lambda$:平均到着(故障)時間間隔

待ち行列理論できちんと解析せずに設備投資すると...

トイレ行列・ATMの行列など

顧客へ長い待ち時間を強いる
　顧客離れ
　企業イメージの低下

→　ビジネスチャンスを逃す

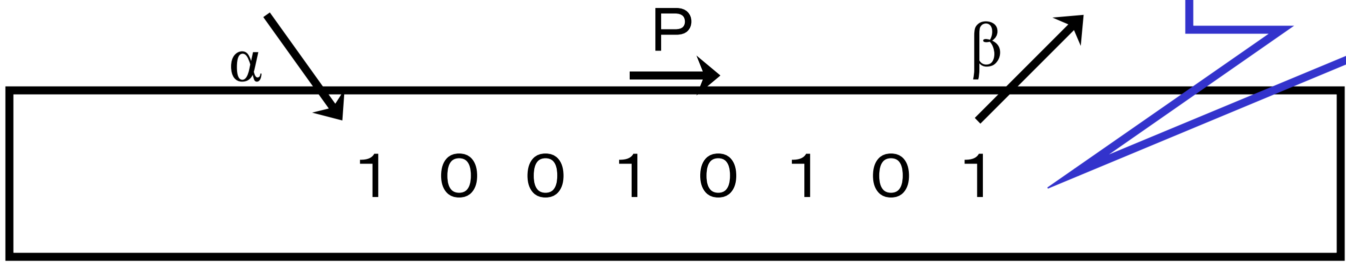
ストックヤード：　クレーンやコンベア能力によっては、貨物や資材で溢れ返ることに

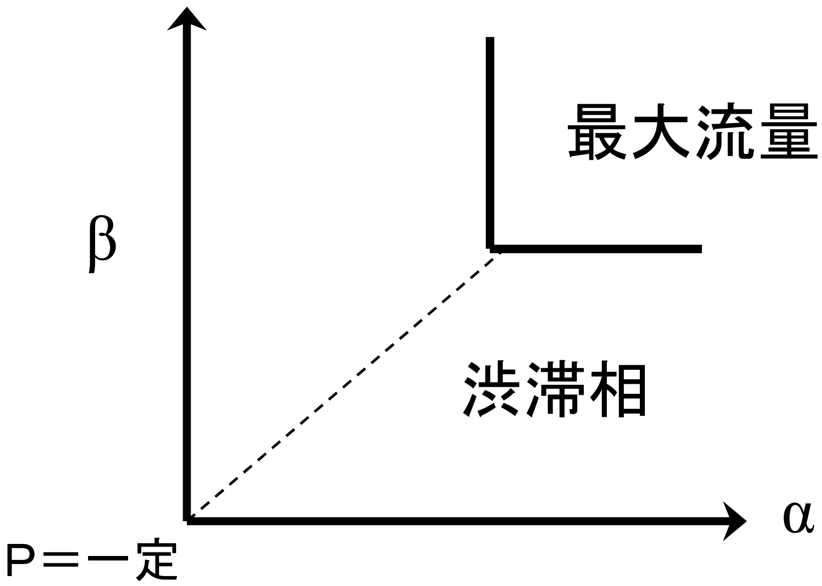
ASEP：空間の大きさを考える渋滞モデル
前が空いているときだけ進む

自己駆動粒子系の渋滞学
東京大学　西成活裕先生
http://soliton.t.u-tokyo.ac.jp/nishilab/

1）前が空いているとき確率pで進む
2）左から確率αで入り、右へ確率βで出る

1と0のパターンが状態
この例では2^8=256状態





ループ上を走る
複数自動車の実験
→ 密度によって自然渋滞

非常口への人の流れ
→ 障害物を非対称に
置くと早く出られる

まとめ

・マルコフ性とは？　エルゴート性とは？

・状態遷移行列・状態分布行列・報酬行列とは？

・状態遷移行列と状態分布行列による状態の予測計算

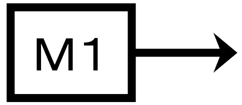
・極限分布とは？　エルゴート性とは？
　定常分布とは？　平均報酬の計算方法は？

・交通流や待ち行列の解析への応用

【演習問題】2016.12.16

学籍番号
氏　名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

右図のように，機械M1によって製品が生産される工場がある.



●機械M1は「稼働」と「休止」の２状態を有する.
●機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる.
●機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.5 で稼動状態を継続
●機械が「休止」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰
●機械が「稼動」状態にあり、次のステップでも稼動しているとき、状態遷移によって報酬 9 万円を得る
●機械が「稼動」状態にあり、次のステップで休止するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る
●機械が「休止」状態にあり、次のステップでも休止しているとき、状態遷移によって報酬 －7 万円を得る
●機械が「休止」状態にあり、次のステップで稼動するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る

問１：状態遷移確率行列と報酬行列を求めよ。

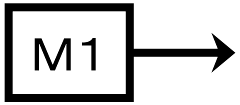
問２：機械M1の平均稼働率を求めよ。それを知るためには何を計算すればよいか？

問３：この機械で得られる平均報酬を求めよ。

【演習問題】

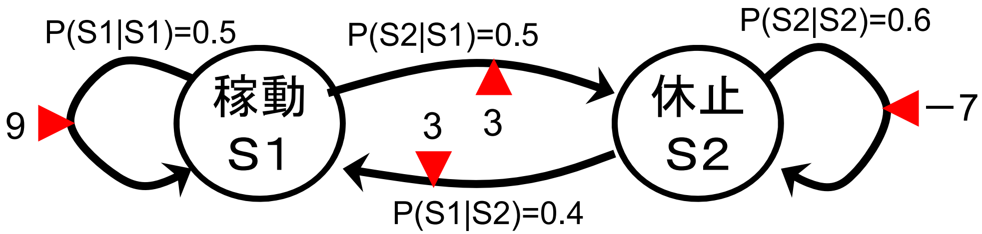
学籍番号
氏　名

右図のように，機械M1によって製品が生産される工場がある.



- 機械M1は「稼働」と「休止」の2状態を有する.
- 機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる.
- 機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.5 で稼動状態を継続
- 機械が「休止」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰
- 機械が「稼動」状態にあり、次のステップでも稼動しているとき、状態遷移によって報酬 9 万円を得る
- 機械が「稼動」状態にあり、次のステップで休止するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る
- 機械が「休止」状態にあり、次のステップでも休止しているとき、状態遷移によって報酬 －7 万円を得る
- 機械が「休止」状態にあり、次のステップで稼動するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る

問1：状態遷移確率行列と報酬行列を求めよ。



$$P = \begin{bmatrix} P(s_1 \mid s_1) & P(s_2 \mid s_1) \\ P(s_1 \mid s_2) & P(s_2 \mid s_2) \end{bmatrix} = ?$$

$$R = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \end{bmatrix} = ?$$

問2：機械M1の平均稼働率を求めよ。それを知るためには何を計算すればよいか？

定常分布を計算し、状態S1の確率を求める。

$$\begin{cases} [a_1 \quad a_2] = [a_1 \quad a_2] \begin{bmatrix} P(s_1 \mid s_1) & P(s_2 \mid s_1) \\ P(s_1 \mid s_2) & P(s_2 \mid s_2) \end{bmatrix} \\ a_1 + a_2 = 1 \end{cases}$$

この方程式を解くと

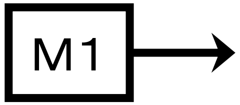
問3：この機械で得られる平均報酬を求めよ。

定常分布と報酬行列より

【演習問題】

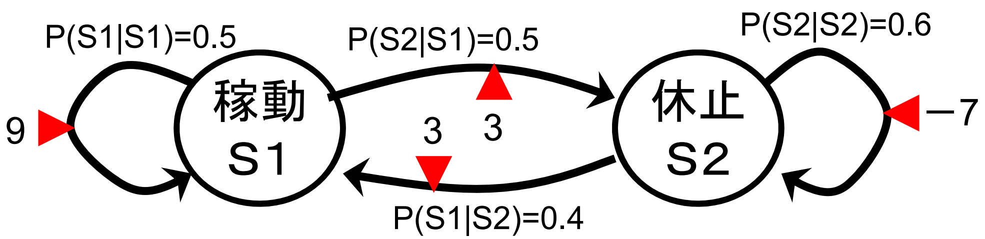
学籍番号
氏　名

右図のように，機械M1によって製品が生産される工場がある．



- 機械M1は「稼働」と「休止」の2状態を有する．
- 機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる．
- 機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.5 で稼動状態を継続
- 機械が「休止」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰
- 機械が「稼動」状態にあり、次のステップでも稼動しているとき、状態遷移によって報酬 9 万円を得る
- 機械が「稼動」状態にあり、次のステップで休止するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る
- 機械が「休止」状態にあり、次のステップでも休止しているとき、状態遷移によって報酬 −7 万円を得る
- 機械が「休止」状態にあり、次のステップで稼動するとき、状態遷移によって報酬 3 万円を得る

問1：状態遷移確率行列と報酬行列を求めよ。



$$P=\begin{bmatrix} P(s_1|s_1) & P(s_2|s_1) \\ P(s_1|s_2) & P(s_2|s_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.5\times 9+0.5\times 3 \\ 0.4\times 3+0.6\times(-7) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

問2：機械M1の平均稼働率を求めよ。それを知るためには何を計算すればよいか？

定常分布を計算し、状態S1の確率を求める。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \\ a_1+a_2=1 \end{cases}$$

この方程式を解くと $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{\frac{4}{9}} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$

「稼動」状態の確率
＝平均稼働率

問3：この機械で得られる平均報酬を求めよ。

定常分布と報酬行列より $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}=1$