九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

システム設計工学 （担当：木村）

（10） 吸収マルコフ過程

場所：船1講義室

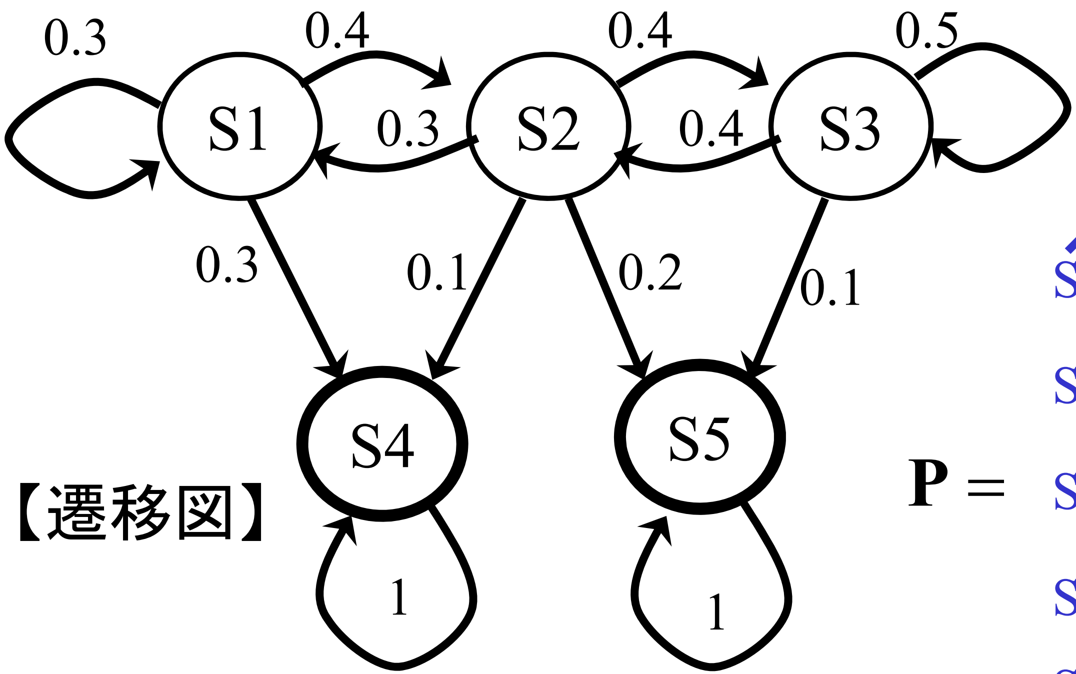
http：//sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html

吸収的マルコフ過程

●状態遷移に「終わり」の存在するような問題をモデル化

例）劣化する機械の管理問題など

●終わりの状態＝ $\boxed{}$



【遷移図】

一時的状態：S1, S2, S3

吸収状態：　S4, S5

【推移確率行列】

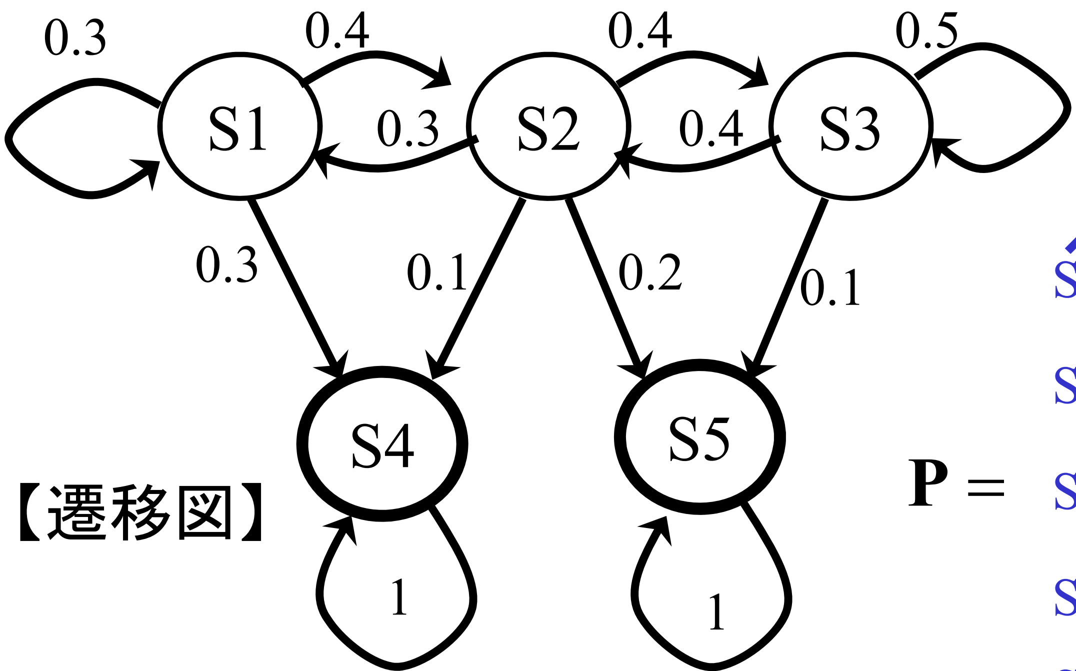
$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ S1 \\ S2 \\ S3 \\ S4 \\ S5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} S1 & S2 & S3 & S4 & S5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|cc}
0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\
0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\
0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

一時的状態の行列 $\mathbf{Q}$

行列 $\mathbf{U}$

吸収的マルコフ過程

- ●状態遷移に「終わり」の存在するような問題をモデル化
  例）劣化する機械の管理問題など
- ●終わりの状態＝ **吸収状態**



【遷移図】

一時的状態：S1, S2, S3
吸収状態：　S4, S5

【推移確率行列】

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ S1 \\ S2 \\ S3 \\ S4 \\ S5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} S1 & S2 & S3 & S4 & S5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|cc}
0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\
0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\
0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

一時的状態の行列 $\mathbf{Q}$

行列 $\mathbf{U}$

吸収的マルコフ過程の遷移確率行列

【推移確率行列】

一時的状態の行列 $\mathbf{Q}$

各状態から各吸収状態へ陥る確率の行列 $\mathbf{U}$

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{U} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

ゼロ行列

単位行列

吸収的マルコフ過程の状態遷移

$$[\sigma_1(t) \quad \sigma_2(t) \quad \sigma_3(t) \quad \sigma_4(t) \quad \sigma_5(t)] = [\sigma_1(0) \quad \sigma_2(0) \quad \sigma_3(0) \quad \sigma_4(0) \quad \sigma_5(0)] \left[\begin{array}{ccc|cc} 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^t$$

tステップ後の状態分布

初期状態分布

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(0)\,\mathbf{P}^t$$

$$\mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^t & \mathbf{U}(t) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

吸収的マルコフ過程の状態遷移

$$\begin{bmatrix}\sigma_1(t) & \sigma_2(t) & \sigma_3(t) & \sigma_4(t) & \sigma_5(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_1(0) & \sigma_2(0) & \sigma_3(0) & \sigma_4(0) & \sigma_5(0)\end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|cc} 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^t$$

tステップ後の
状態分布

初期状態分布

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(0)\,\mathbf{P}^t$$

$$\boxed{\mathbf{U}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \cdots + \mathbf{Q}^{t-1}\right)\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^t & \mathbf{U}(t) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

吸収的マルコフ過程の極限

$t \to \infty$ とすると $\mathbf{I}+\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2+\cdots = \boxed{} = \mathbf{M}$

基本行列

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}^t = \boxed{}$$

i からスタートして1ステップ後に j に存在する確率

i からスタートして2ステップ後に j に存在する確率

【平均訪問回数】 基本行列 M の要素 $m_{ij} = p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + p_{ij}^{(3)} + \cdots$ は「i からスタートした遷移が吸収状態に陥るまでに一時的状態 j を訪問する平均回数を表す。

【吸収確率】 行列 MU = B の要素 b_{ij} は「iからスタートして j へ陥る確率」すなわち吸収確率を表す。

【平均吸収時間】 状態 i からスタートして、いずれかの吸収状態に陥るまでの平均時間（ステップ数）は、基本行列 M および全ての要素が1の列ベクトル g を用いて Mg によって表される。（平均訪問回数を 全てのj について合計した値）

吸収的マルコフ過程の極限

$t \to \infty$ とすると $\mathbf{I}+\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^2+\cdots = \boxed{(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}} = \mathbf{M}$

基本行列

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}^t = \boxed{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{MU} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]}$$

i からスタートして1ステップ後に j に存在する確率

i からスタートして2ステップ後に j に存在する確率

【平均訪問回数】 基本行列 M の要素 $m_{ij} = p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + p_{ij}^{(3)} + \cdots$ は「i からスタートした遷移が吸収状態に陥るまでに一時的状態 j を訪問する平均回数を表す。

【吸収確率】 行列 MU = B の要素 b_{ij} は「iからスタートして j へ陥る確率」すなわち吸収確率を表す。

【平均吸収時間】 状態 i からスタートして、いずれかの吸収状態に陥るまでの平均時間(ステップ数)は、基本行列 M および全ての要素が1の列ベクトル g を用いて Mg によって表される。(平均訪問回数を全ての j について合計した値)

吸収的マルコフ過程の極限：報酬合計の計算

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{MU} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

報酬行列

報酬の期待値は1×nの行列になる

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\Pr(s_i \mid s_1)R(s_1, s_i) \\ \sum_{i=1}^{n}\Pr(s_i \mid s_2)R(s_2, s_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}\Pr(s_i \mid s_n)R(s_n, s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \\ \vdots \\ R(s_n) \end{bmatrix}$$

←状態S1の報酬の期待値
←状態S2の報酬の期待値
←状態Snの報酬の期待値

【報酬合計の期待値】 ＝平均訪問回数×各状態の報酬の期待値
つまり平均訪問回数を表す基本行列 Mに報酬行列Rをかける
$\boxed{}$＝ 各状態からスタートして吸収状態に陥るまでに得る報酬合計の期待値になる。

吸収的マルコフ過程の極限：報酬合計の計算

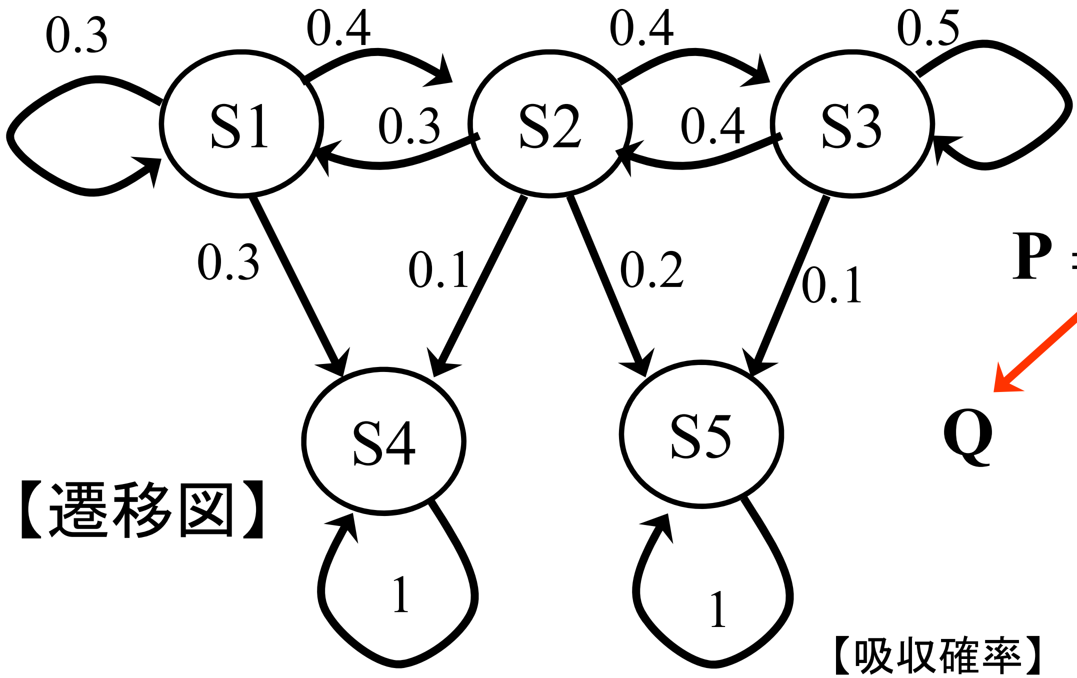
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{MU} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

報酬行列　報酬の期待値は1×nの行列になる

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_1) R(s_1, s_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_2) R(s_2, s_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \Pr(s_i \mid s_n) R(s_n, s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \\ \vdots \\ R(s_n) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{状態S1の報酬の期待値} \\ \leftarrow \text{状態S2の報酬の期待値} \\ \\ \leftarrow \text{状態Snの報酬の期待値} \end{array}$$

【報酬合計の期待値】＝平均訪問回数×各状態の報酬の期待値
つまり平均訪問回数を表す基本行列 Mに報酬行列Rをかける
$\boxed{\mathrm{MR}}$＝ 各状態からスタートして吸収状態に陥るまでに得る報酬合計の期待値になる。

〔計算例〕



【遷移図】

【推移確率行列】

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\mathbf{U}$

$\mathbf{Q}$

【吸収確率】

$$\mathbf{B} = \mathbf{MU} = \begin{bmatrix} 0.69 & 0.31 \\ 0.45 & 0.55 \\ 0.36 & \boxed{0.64} \end{bmatrix}$$

S3 からスタートして吸収状態 S5 に陥る確率

【基本行列】

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.91 & 1.12 & 0.90 \\ \boxed{0.84} & 1.97 & 1.57 \\ 0.67 & 1.57 & 3.26 \end{bmatrix}$$

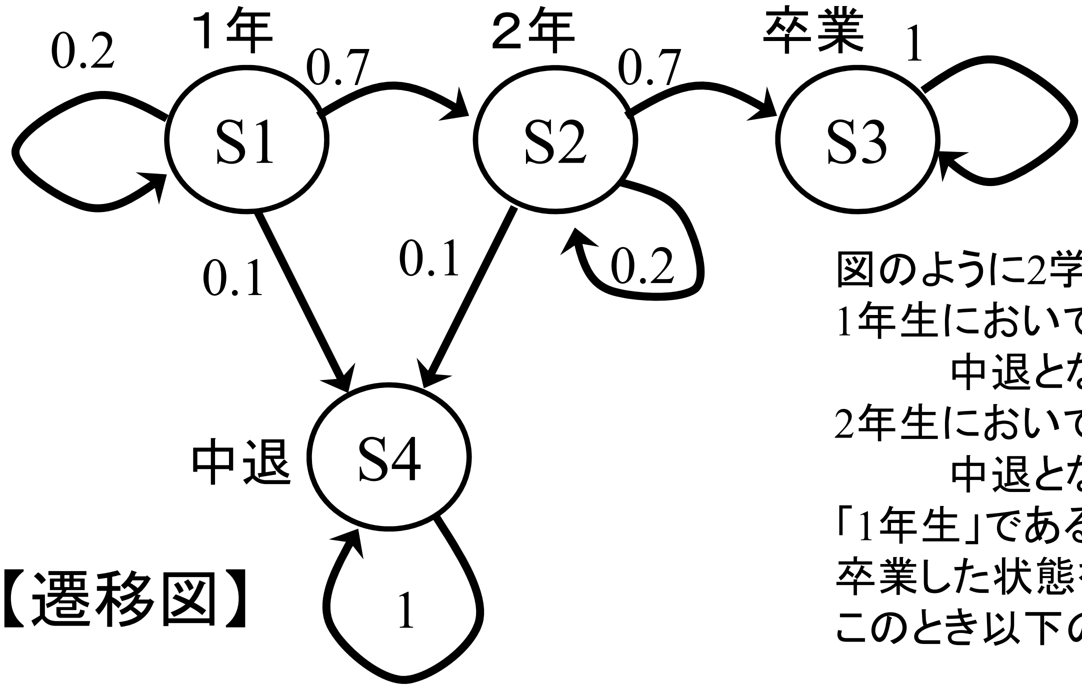
S2 からスタートして吸収状態に陥るまでに S1 を訪問する平均回数

【平均吸収時間】

$$\mathbf{Mg} = \begin{bmatrix} 1.91 & 1.12 & 0.90 \\ 0.84 & 1.97 & 1.57 \\ 0.67 & 1.57 & 3.26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.93 \\ \boxed{4.38} \\ 5.50 \end{bmatrix}$$

S2 からスタートして吸収状態に陥るまでの時間

【練習問題】



【遷移図】

図のように2学年から構成される学校がある。
1年生において、留年（次年度も1年生）となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、2年生へ進級する確率 0.7
2年生において、留年（次年度も2年生）となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、卒業となる確率は0.7
「1年生」である状態を S1, 「2年生」である状態を S2、
卒業した状態を S3、中退を S4 とする。
このとき以下の問に答えよ.

【問１】 マルコフ過程でモデル化し、状態遷移行列を示せ。

【問２】 1年生からスタートした学生が卒業および退学した状態になるまでの平均年数（平均遷移ステップ数）を計算せよ。

【問３】 この学校では設備等の都合により 1, 2年生合わせた学生数の定員が100名となっており、なるべく学生の総数が定員に近いことが望ましい。このとき、毎年新1年生を何名入学させるべきか計算せよ。

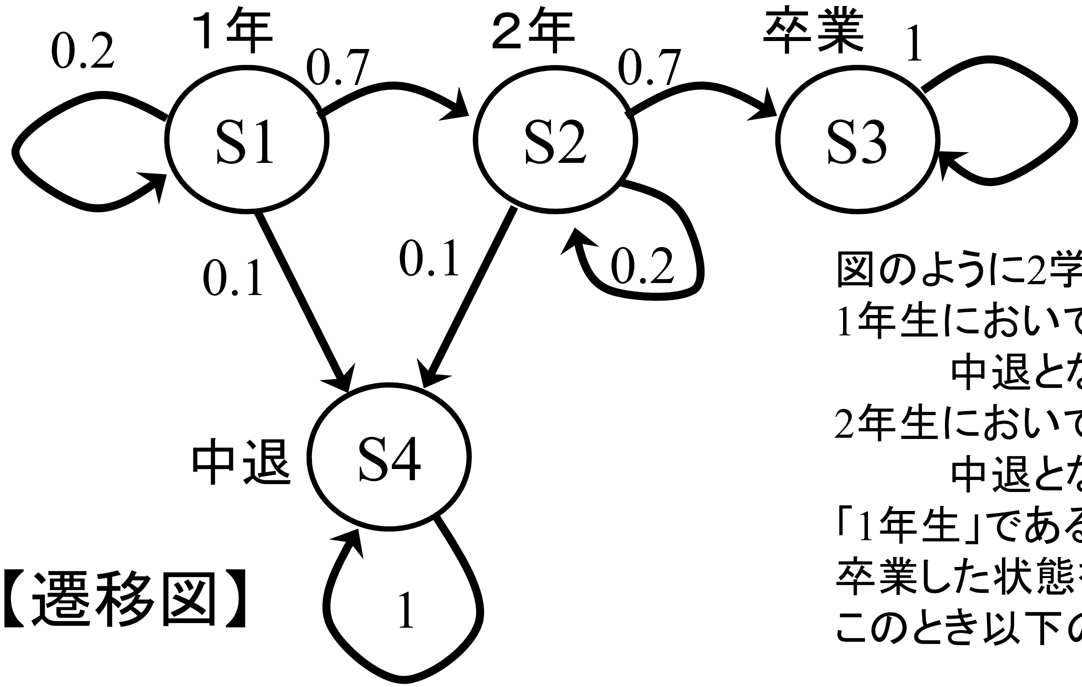
【復習】 2x2行列の逆行列の公式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{I}}_{\text{単位行列}}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【練習問題】



【遷移図】

図のように2学年から構成される学校がある。
1年生において、留年（次年度も1年生）となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、2年生へ進級する確率 0.7
2年生において、留年（次年度も2年生）となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、卒業となる確率は0.7
「1年生」である状態を S1, 「2年生」である状態を S2、
卒業した状態を S3、中退を S4 とする。
このとき以下の問に答えよ.

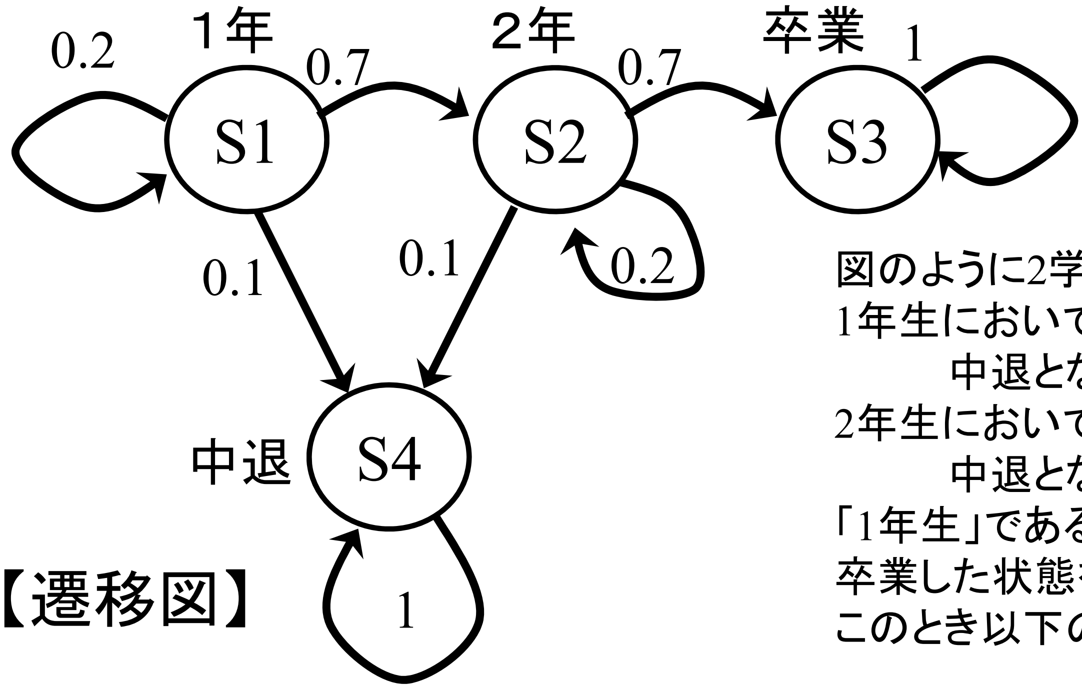
【問1】 マルコフ過程でモデル化し、状態遷移行列を示せ。

$$
\begin{array}{c}
\mathbf{Q} \qquad \mathbf{U} \\
\begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

【問2】 1年生からスタートした学生が卒業または退学した状態になるまでの平均年数（平均遷移ステップ数）を計算せよ。

【問3】 この学校では設備等の都合により 1, 2年生合わせた学生数の定員が100名となっており、なるべく学生の総数が定員に近いことが望ましい。このとき、毎年新1年生を何名入学させるべきか計算せよ。

【練習問題】



【遷移図】

図のように2学年から構成される学校がある。
1年生において、留年(次年度も1年生)となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、2年生へ進級する確率 0.7
2年生において、留年(次年度も2年生)となる確率は 0.2、
中退となる確率は 0.1、卒業となる確率は0.7
「1年生」である状態を S1, 「2年生」である状態を S2、
卒業した状態を S3、中退を S4 とする。
このとき以下の問に答えよ.

【問1】 マルコフ過程でモデル化し、状態遷移行列を示せ。

$\mathbf{U}$

$$\mathbf{Q} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0.2 & 0.7 \\ 0 & 0.2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0.1 \\ 0.7 & 0.1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

【問2】 1年生からスタートした学生が卒業または退学した状態になるまでの
平均年数(平均遷移ステップ数)を計算せよ。

1年からスタートして吸収状態へ
陥るまでの平均ステップ

基本行列

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 5/4 & 35/32 \\ 0 & 5/4 \end{bmatrix}$$

よって

$$\begin{bmatrix} 5/4 & 35/32 \\ 0 & 5/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{75/32} \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

【問3】 この学校では設備等の都合により1, 2年生合わせた学生数の定員が100名となっており、なるべく学生の総数が定員に近いことが望ましい。このとき、毎年新1年生を何名入学させるべきか計算せよ。

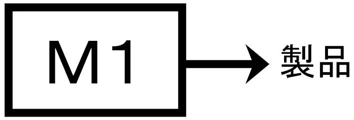
1年からスタートして卒業または退学するまでの平均年数＝75／32

毎年 x 人が1年生として入ってくると、在学生の人数は $\dfrac{75}{32}x$ 　　これを 100 にしたい

$$\frac{75}{32}x = 100 \qquad x = \frac{3200}{75} = 42.666$$

よって入学者は 42～43名とすべき

【演習問題】2017.01.06



学籍番号
氏　　名 ______________________

●機械M1は「稼働」「不調」「故障」の３状態を有する.
●機械の状態遷移は，一定時間間隔で離散的に起きる.
●機械が「稼動」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.6 で稼動状態を継続，
　確率 0.3 で「不調」状態へ遷移，確率 0.1 で故障する
●機械が「不調」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼動状態へ復帰，
　確率 0.4 で「不調」状態を継続，確率 0.2 で故障する
●機械が「故障」状態に陥ると、そこから抜け出せない
●機械が「稼動」状態にあるとき，次ステップの状態に関係なく 9万円の利益がある.
●機械が「不調」状態にあるとき，次ステップの状態に関係なく －6万円の利益がある.
●機械が「故障」状態にあるとき，利益は 0

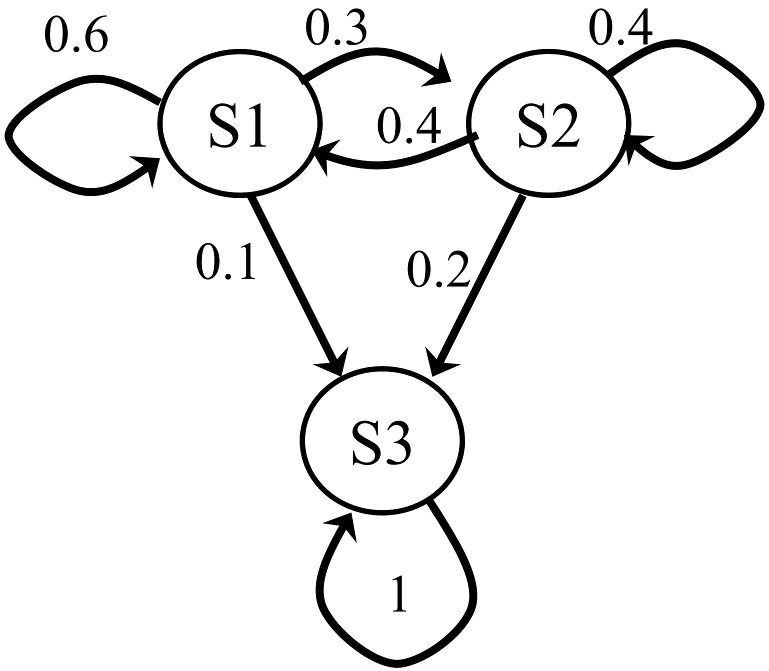
「稼働」を状態１，「不調」を状態２，「故障」を状態３として状態遷移マトリクスを作り，以下を計算せよ。

１．状態１からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態１を訪問する平均回数
　　状態１からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態2を訪問する平均回数
　　状態2からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態1を訪問する平均回数
　　状態２からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態2を訪問する平均回数

２．各状態からスタートして故障状態へ陥るまでの平均ステップ数

３．各状態からスタートした場合の報酬合計の期待値

【遷移図】



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

状態1からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態1を訪問する平均回数

状態1からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態2を訪問する平均回数

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 5/2 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix}$$

状態2からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態1を訪問する平均回数

状態2からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態2を訪問する平均回数

$$\mathbf{Mg} = \begin{bmatrix} 5 & 5/2 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/2 \\ 20/3 \end{bmatrix}$$

状態1からスタートして故障状態へ
陥るまでの平均ステップ数

状態2からスタートして故障状態へ
陥るまでの平均ステップ数

$$\mathbf{MR} = \begin{bmatrix} 5 & 5/2 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

状態1からスタートした
場合の報酬合計の期待値

状態2からスタートした
場合の報酬合計の期待値