

九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

システム設計工学（担当：木村）

(10) 吸収マルコフ過程

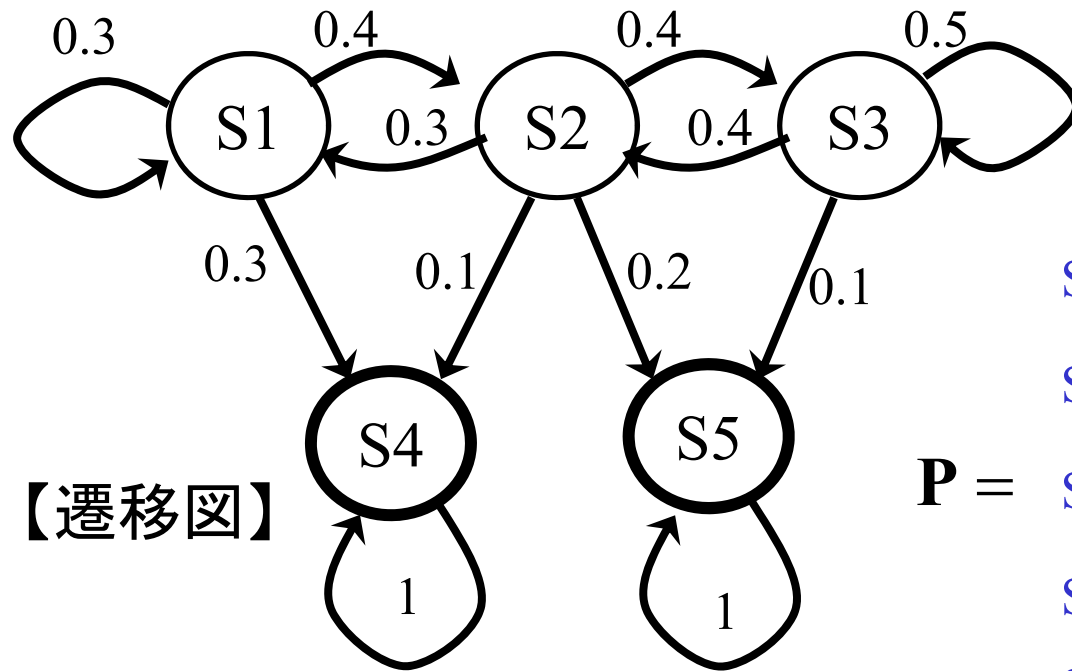
場所：船1講義室

<http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html>

吸収的マルコフ過程

- 状態遷移に「終わり」の存在するような問題をモデル化
例) 劣化する機械の管理問題など

- 終わりの状態 =



一時的状態: S1, S2, S3
吸収状態: S4, S5

【推移確率行列】

$P =$

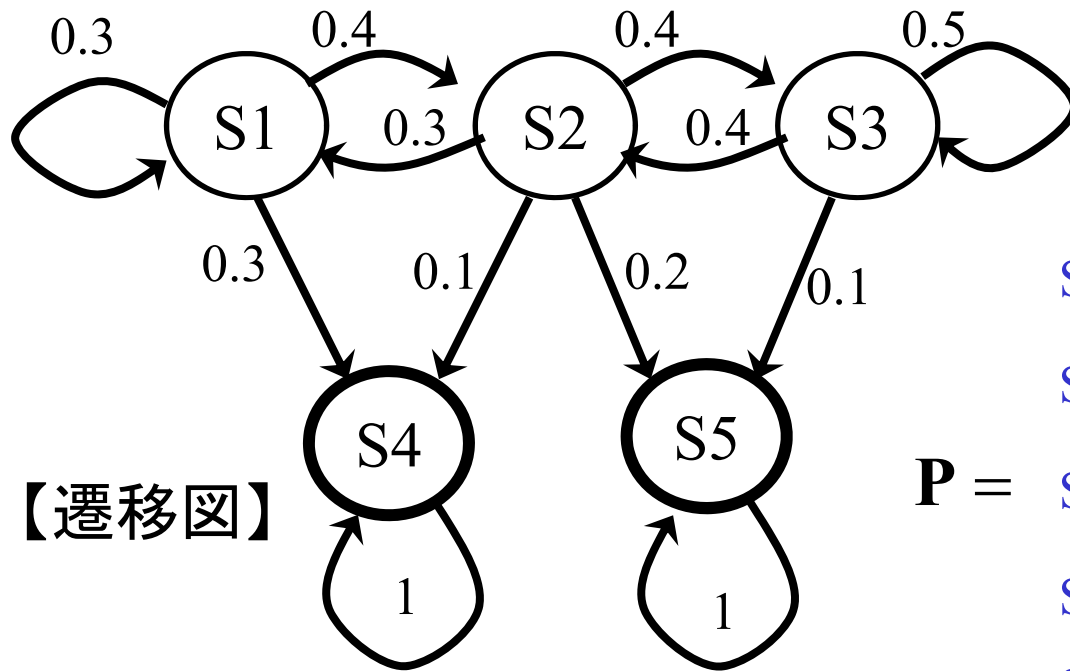
	S1	S2	S3	S4	S5
S1	0.3	0.4	0	0.3	0
S2	0.3	0	0.4	0.1	0.2
S3	0	0.4	0.5	0	0.1
S4	0	0	0	1	0
S5	0	0	0	0	1

一時的状態
の行列 Q

行列 U

吸収的マルコフ過程

- 状態遷移に「終わり」の存在するような問題をモデル化
例) 劣化する機械の管理問題など
- 終わりの状態 = **吸収状態**



一時的状態: S1, S2, S3
吸収状態: S4, S5

【推移確率行列】

$P =$

	S1	S2	S3	S4	S5
S1	0.3	0.4	0	0.3	0
S2	0.3	0	0.4	0.1	0.2
S3	0	0.4	0.5	0	0.1
S4	0	0	0	1	0
S5	0	0	0	0	1

一時的状態
の行列 Q

行列 U

吸収的マルコフ過程の遷移確率行列

【推移確率行列】

一時的状態
の行列 Q

各状態から各吸収状態へ
陥る確率の行列 U

$$P = \left[\begin{array}{c|c} Q & U \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

ゼロ行列

単位行列

吸収的マルコフ過程の状態遷移

$$[\sigma_1(t) \ \sigma_2(t) \ \sigma_3(t) \ \sigma_4(t) \ \sigma_5(t)] = [\sigma_1(0) \ \sigma_2(0) \ \sigma_3(0) \ \sigma_4(0) \ \sigma_5(0)] \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$$

tステップ後の
状態分布

初期状態分布

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(0) \mathbf{P}^t$$

$$\mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^t & \mathbf{U}(t) \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right]$$



吸収的マルコフ過程の状態遷移

$$[\sigma_1(t) \ \sigma_2(t) \ \sigma_3(t) \ \sigma_4(t) \ \sigma_5(t)] = [\sigma_1(0) \ \sigma_2(0) \ \sigma_3(0) \ \sigma_4(0) \ \sigma_5(0)] \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$$

tステップ後の
状態分布

初期状態分布

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(0) \mathbf{P}^t$$

$$\mathbf{U}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \dots + \mathbf{Q}^{t-1}) \mathbf{U}$$

$$\mathbf{P}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^t & \mathbf{U}(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

吸収的マルコフ過程の極限

$$t \rightarrow \infty \text{ とすると } \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \dots = \boxed{\phantom{\mathbf{M}}} = \mathbf{M}$$

基本行列

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t = \boxed{\phantom{\mathbf{M}}}$$

i からスタートして1ステップ
後に j に存在する確率

i からスタートして2ステップ
後に j に存在する確率

【平均訪問回数】 基本行列 \mathbf{M} の要素 $m_{ij} = p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + p_{ij}^{(3)} + \dots$ は「i からスタートした遷移が吸収状態に陥るまでに一時的状態 j を訪問する平均回数を表す。

【吸収確率】 行列 $\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{B}$ の要素 b_{ij} は「i からスタートして j へ陥る確率」すなわち**吸収確率**を表す。

【平均吸収時間】 状態 i からスタートして、いずれかの吸収状態に陥るまでの平均時間(ステップ数)は、基本行列 \mathbf{M} および全ての要素が1の列ベクトル \mathbf{g} を用いて $\mathbf{M}\mathbf{g}$ によって表される。
(平均訪問回数を全ての j について合計した値)

吸収的マルコフ過程の極限

$$t \rightarrow \infty \text{ とすると } \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \dots = \boxed{(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}} = \mathbf{M}$$

基本行列

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t = \boxed{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{MU} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right]}$$

i からスタートして1ステップ
後にjに存在する確率

i からスタートして2ステップ
後にjに存在する確率

【平均訪問回数】 基本行列 \mathbf{M} の要素 $m_{ij} = p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + p_{ij}^{(3)} + \dots$ は「i からスタートした遷移が吸収状態に陥るまでに一時的状態 j を訪問する平均回数を表す。

【吸収確率】 行列 $\mathbf{MU} = \mathbf{B}$ の要素 b_{ij} は「i からスタートして j へ陥る確率」すなわち**吸収確率**を表す。

【平均吸収時間】 状態 i からスタートして、いずれかの吸収状態に陥るまでの平均時間(ステップ数)は、基本行列 \mathbf{M} および全ての要素が1の列ベクトル \mathbf{g} を用いて \mathbf{Mg} によって表される。
(平均訪問回数を全ての j について合計した値)

吸収的マルコフ過程の極限：報酬合計の計算

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{MU} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right]$$

報酬行列 報酬の期待値は $1 \times n$ の行列になる

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \Pr(s_i | s_1) R(s_1, s_i) \\ \sum_{i=1}^n \Pr(s_i | s_2) R(s_2, s_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \Pr(s_i | s_n) R(s_n, s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \\ \vdots \\ R(s_n) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{状態 } S_1 \text{ の報酬の期待値} \\ \leftarrow \text{状態 } S_2 \text{ の報酬の期待値} \\ \leftarrow \text{状態 } S_n \text{ の報酬の期待値} \end{array}$$

【報酬合計の期待値】 = 平均訪問回数 × 各状態の報酬の期待値

つまり平均訪問回数を表す基本行列 \mathbf{M} に報酬行列 \mathbf{R} をかける

 = 各状態からスタートして吸収状態に陥るまでに得る報酬合計の期待値になる。

吸収的マルコフ過程の極限：報酬合計の計算

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{MU} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right]$$

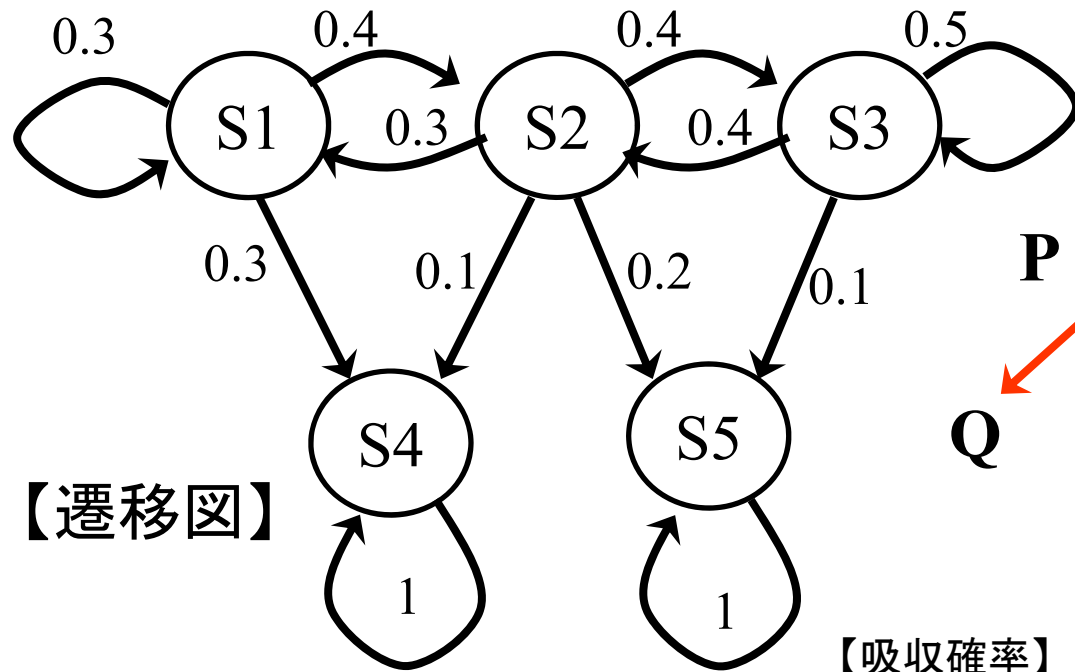
報酬行列 報酬の期待値は $1 \times n$ の行列になる

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \Pr(s_i | s_1) R(s_1, s_i) \\ \sum_{i=1}^n \Pr(s_i | s_2) R(s_2, s_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \Pr(s_i | s_n) R(s_n, s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s_1) \\ R(s_2) \\ \vdots \\ R(s_n) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{状態 } S_1 \text{ の報酬の期待値} \\ \leftarrow \text{状態 } S_2 \text{ の報酬の期待値} \\ \leftarrow \text{状態 } S_n \text{ の報酬の期待値} \end{array}$$

【報酬合計の期待値】 = 平均訪問回数 \times 各状態の報酬の期待値
つまり平均訪問回数を表す基本行列 \mathbf{M} に報酬行列 \mathbf{R} をかける

MR = 各状態からスタートして吸収状態に陥るまでに得る報酬合計の期待値になる。

【計算例】



【遷移図】

【推移確率行列】

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U

【吸収確率】

$$B = MU =$$

$$\begin{bmatrix} 0.69 & 0.31 \\ 0.45 & 0.55 \\ 0.36 & 0.64 \end{bmatrix}$$

S3 からスタートして吸収状態 S5 に陥る確率

S2 からスタートして吸収状態に陥るまでの時間

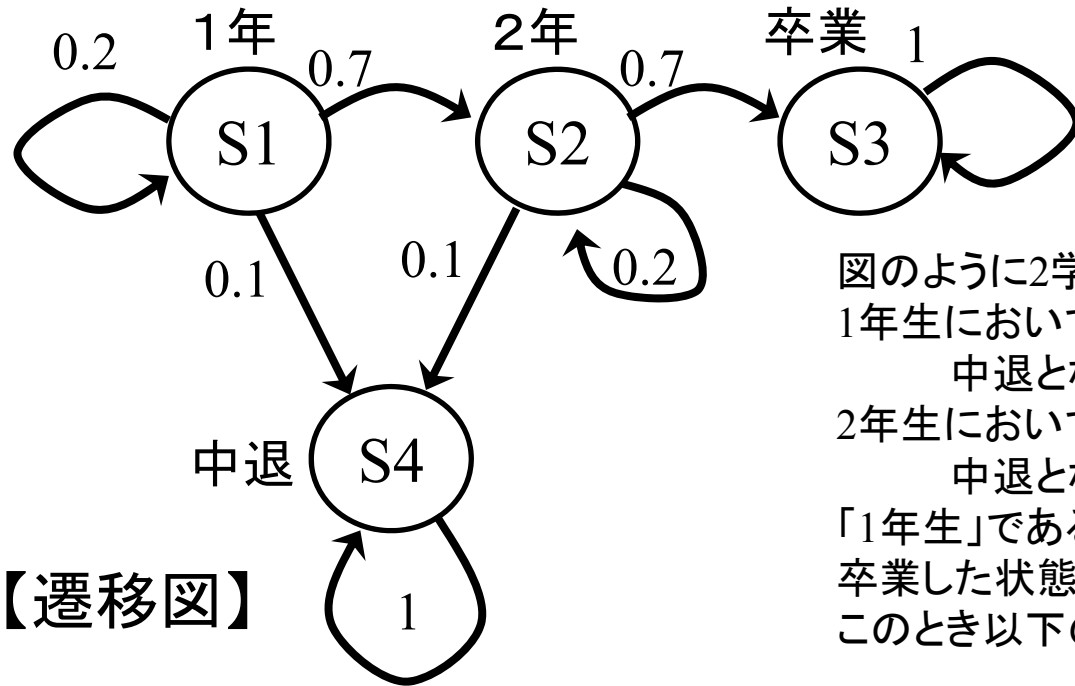
【基本行列】

$$M = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.91 & 1.12 & 0.90 \\ 0.84 & 1.97 & 1.57 \\ 0.67 & 1.57 & 3.26 \end{bmatrix}$$

S2 からスタートして吸収状態に陥るまでに S1 を訪問する平均回数

【平均吸収時間】

$$Mg = \begin{bmatrix} 1.91 & 1.12 & 0.90 \\ 0.84 & 1.97 & 1.57 \\ 0.67 & 1.57 & 3.26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.93 \\ 4.38 \\ 5.50 \end{bmatrix}$$



【練習問題】

図のように2学年から構成される学校がある。
 1年生において、留年(次年度も1年生)となる確率は 0.2、
 中退となる確率は 0.1、2年生へ進級する確率 0.7
 2年生において、留年(次年度も2年生)となる確率は 0.2、
 中退となる確率は 0.1、卒業となる確率は0.7
 「1年生」である状態を S1, 「2年生」である状態を S2、
 卒業した状態を S3、中退を S4 とする。
 このとき以下の問に答えよ。

【遷移図】

【問1】 マルコフ過程でモデル化し、状態遷移行列を示せ。

【問2】 1年生からスタートした学生が卒業および退学した状態になるまでの平均年数(平均遷移ステップ数)を計算せよ。

【問3】 この学校では設備等の都合により 1, 2年生合わせた学生数の定員が100名となっており、なるべく学生の総数が定員に近いことが望ましい。このとき、毎年新1年生を何名入学させるべきか計算せよ。

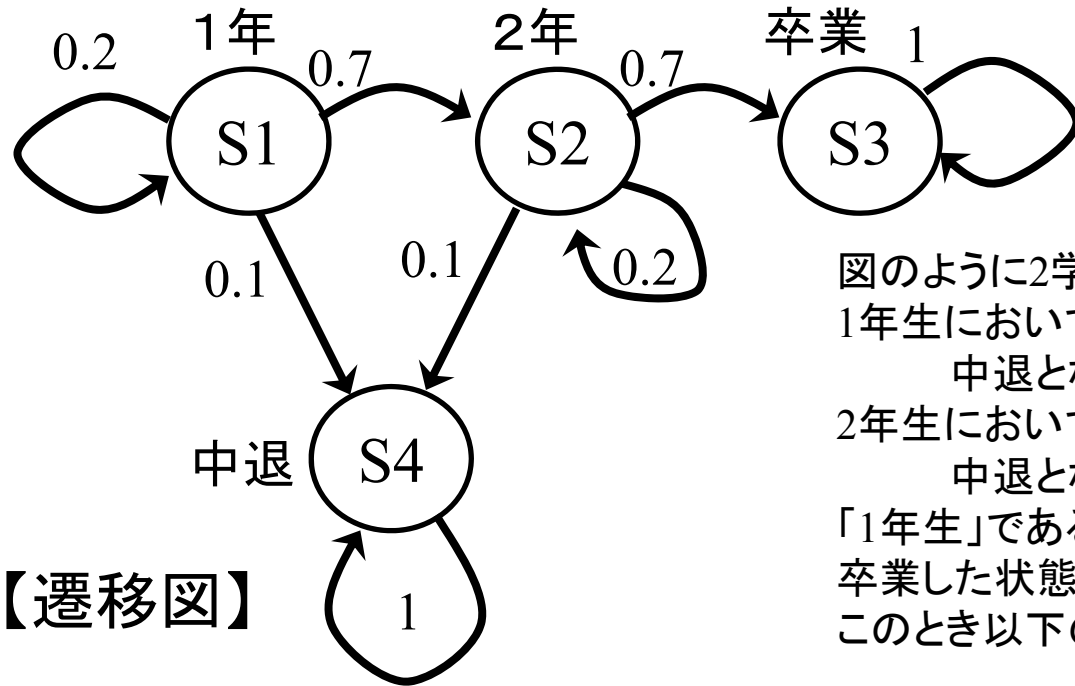
【復習】 2x2行列の逆行列の公式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

↑
単位行列

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



【遷移図】

【練習問題】

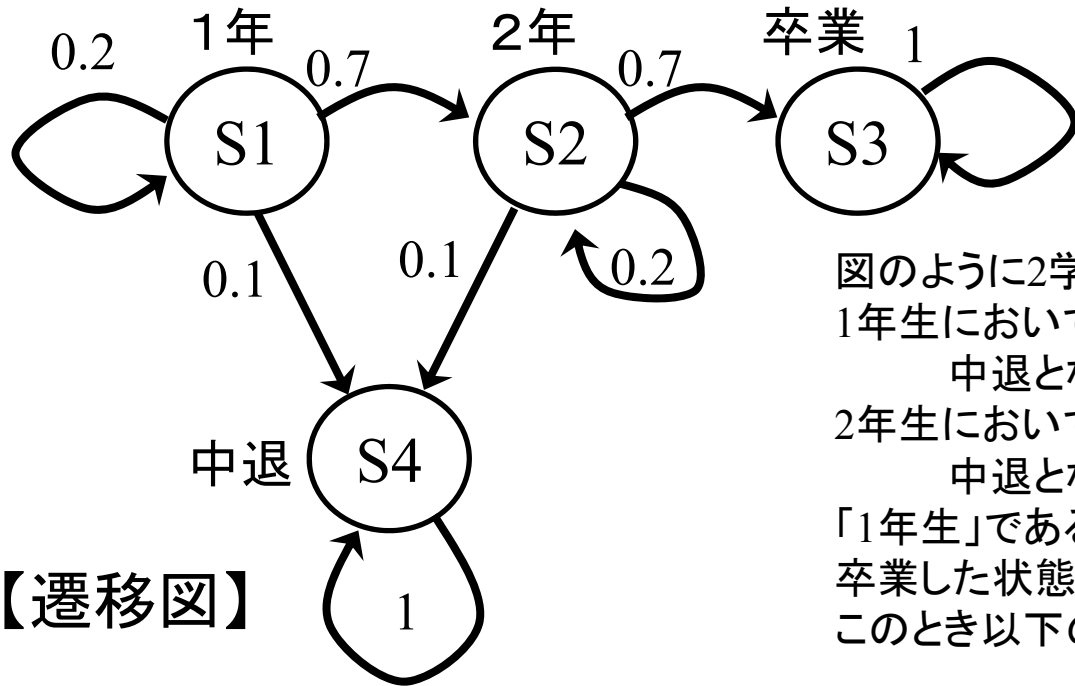
図のように2学年から構成される学校がある。
 1年生において、留年(次年度も1年生)となる確率は 0.2、
 中退となる確率は 0.1、2年生へ進級する確率 0.7
 2年生において、留年(次年度も2年生)となる確率は 0.2、
 中退となる確率は 0.1、卒業となる確率は0.7
 「1年生」である状態を S1、「2年生」である状態を S2、
 卒業した状態を S3、中退を S4 とする。
 このとき以下の問に答えよ。

【問1】 マルコフ過程でモデル化し、状態遷移行列を示せ。

$$\begin{matrix}
 & & & \mathbf{U} \\
 \mathbf{Q} & \left[\begin{array}{cc|cc}
 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 \\
 0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{matrix}$$

【問2】 1年生からスタートした学生が卒業または退学した状態になるまでの平均年数(平均遷移ステップ数)を計算せよ。

【問3】 この学校では設備等の都合により 1, 2年生合わせた学生数の定員が100名となっており、なるべく学生の総数が定員に近いことが望ましい。このとき、毎年新1年生を何名入学させるべきか計算せよ。



【練習問題】

図のように2学年から構成される学校がある。
 1年生において、留年(次年度も1年生)となる確率は 0.2、
 中退となる確率は 0.1、2年生へ進級する確率 0.7
 2年生において、留年(次年度も2年生)となる確率は 0.2、
 中退となる確率は 0.1、卒業となる確率は0.7
 「1年生」である状態を S1, 「2年生」である状態を S2、
 卒業した状態を S3、中退を S4 とする。
 このとき以下の問に答えよ。

【遷移図】

【問1】 マルコフ過程でモデル化し、状態遷移行列を示せ。

$$\begin{matrix}
 & & & & \mathbf{U} \\
 & & & & \nearrow \\
 \mathbf{Q} & \left[\begin{array}{cc|cc}
 0.2 & 0.7 & 0 & 0.1 \\
 0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{matrix}$$


【問2】 1年生からスタートした学生が卒業または退学した状態になるまでの平均年数(平均遷移ステップ数)を計算せよ。

基本行列 $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0.2 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0.2 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 5/4 & 35/32 \\ 0 & 5/4 \end{array} \right]$ 1年からスタートして吸収状態へ陥るまでの平均ステップ $\left[\begin{array}{cc|cc} 5/4 & 35/32 \\ 0 & 5/4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75/32 \\ 5/4 \end{bmatrix}$

【問3】 この学校では設備等の都合により 1, 2年生合わせた学生数の定員が100名となっており、なるべく学生の総数が定員に近いことが望ましい。このとき、毎年新1年生を何名入学させるべきか計算せよ。

1年からスタートして卒業または退学するまでの平均年数 = $75 / 32$

毎年 x 人が1年生として入ってくると、在学生の人数は $\frac{75}{32}x$ これを100にしたい

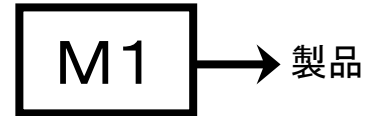


$$\frac{75}{32}x = 100$$

$$x = \frac{3200}{75} = 42.666$$

よって入学者は 42~43名とすべき

【演習問題】 2017.11.10



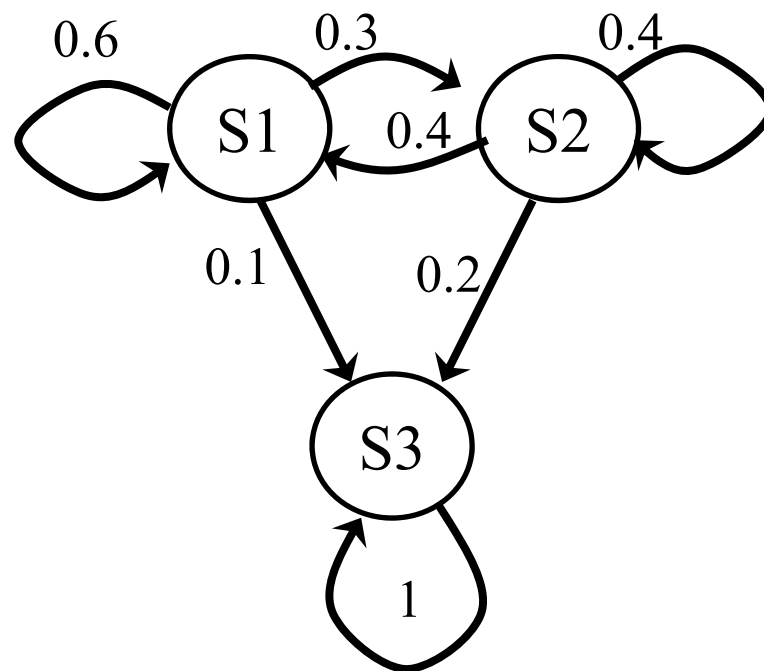
学籍番号
氏名 _____

- 機械M1は「稼働」「不調」「故障」の3状態を有する.
- 機械の状態遷移は、一定時間間隔で離散的に起きる.
- 機械が「稼働」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.6 で稼働状態を継続, 確率 0.3 で「不調」状態へ遷移, 確率 0.1 で故障する
- 機械が「不調」状態にあるとき、次ステップでは確率 0.4 で稼働状態へ復帰, 確率 0.4 で「不調」状態を継続, 確率 0.2 で故障する
- 機械が「故障」状態に陥ると、そこから抜け出せない
- 機械が「稼働」状態にあるとき、次ステップの状態に関係なく 9万円の利益がある.
- 機械が「不調」状態にあるとき、次ステップの状態に関係なく -6万円の利益がある.
- 機械が「故障」状態にあるとき、利益は 0

「稼働」を状態1, 「不調」を状態2, 「故障」を状態3として状態遷移マトリクスを作り, 以下を計算せよ。

1. 状態1からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態1を訪問する平均回数
状態1からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態2を訪問する平均回数
状態2からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態1を訪問する平均回数
状態2からスタートして吸収状態へ陥るまでに状態2を訪問する平均回数
2. 各状態からスタートして故障状態へ陥るまでの平均ステップ数
3. 各状態からスタートした場合の報酬合計の期待値

【遷移図】



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

状態1からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態1を訪問する平均回数

状態1からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態2を訪問する平均回数

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 5/2 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix}$$

状態2からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態1を訪問する平均回数

状態2からスタートして
吸収状態へ陥るまでに
状態2を訪問する平均回数

$$\mathbf{Mg} = \begin{bmatrix} 5 & 5/2 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/2 \\ 20/3 \end{bmatrix}$$

状態1からスタートして故障状態へ
陥るまでの平均ステップ数

状態2からスタートして故障状態へ
陥るまでの平均ステップ数

$$\mathbf{MR} = \begin{bmatrix} 5 & 5/2 \\ 10/3 & 10/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

状態1からスタートした
場合の報酬合計の期待値

状態2からスタートした
場合の報酬合計の期待値