九州大学 工学部地球環境工学科
船舶海洋システム工学コース

システム設計工学 （担当：木村）

(6) 制約付き関数最適化

線形計画法
未定乗数法
ペナルティ関数法＋非線形関数最適化

場所： 船1講義室

授業の資料等は

http://sysplan.nams.kyushu-u.ac.jp/gen/index.html

【制約つき関数最適化】　線形計画問題と線形計画法

線形計画問題とは？

定数　変数　定数

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \ge 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

← 線形等式制約
線形不等式制約

という制約のもとで、

定数　変数

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

← 線形目的関数

を最大化（あるいは最小化）する　$x_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$　を求める問題。

線形計画問題の例1　資源配分問題　（静岡理工科大学総合情報学部菅沼研究室のサイトより引用）

変数　変数

ある製品　X1　および　X2　を生産するためには3種類の原料 a, b, c を要する。
各製品1単位分を生産するのに必要な各原料の量とその在庫量は以下の表のとおり:

原料	製品X1に対する必要量	製品X2に対する必要量	在庫量
a	3	1	9
b	2.5	2	12.5
c	1	2	8

製品X1の利益3万円　　製品X2の利益2万円

このとき、**原料の在庫が許す範囲内で利益が最大**になるように
製品X1とX2の生産量を決めよ。

制約条件:

(1) 原料 a の在庫制約
(2) 原料 b の在庫制約
(3) 原料 c の在庫制約
(4) 製品 X1 の制約
(5) 製品 X2 の制約

目的関数:
（最大化する）

線形計画問題の例1　資源配分問題　（静岡理工科大学総合情報学部菅沼研究室のサイトより引用）

変数　変数

ある製品　X1　および　X2　を生産するためには3種類の原料 a, b, c を要する。
各製品1単位分を生産するのに必要な各原料の量とその在庫量は以下の表のとおり:

原料	製品X1に対する必要量	製品X2に対する必要量	在庫量
a	3	1	9
b	2.5	2	12.5
c	1	2	8

製品X1の利益3万円　　製品X2の利益2万円

このとき、**原料の在庫が許す範囲内で利益が最大**になるように
製品X1とX2の生産量を決めよ。

制約条件:

$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 \le 9 & (1)\ \text{原料 a の在庫制約} \\
2.5x_1 + 2x_2 \le 12.5 & (2)\ \text{原料 b の在庫制約} \\
x_1 + 2x_2 \le 8 & (3)\ \text{原料 c の在庫制約} \\
x_1 \ge 0 & (4)\ \text{製品 X1 の制約} \\
x_2 \ge 0 & (5)\ \text{製品 X2 の制約}
\end{cases}
$$

目的関数:
（最大化する）

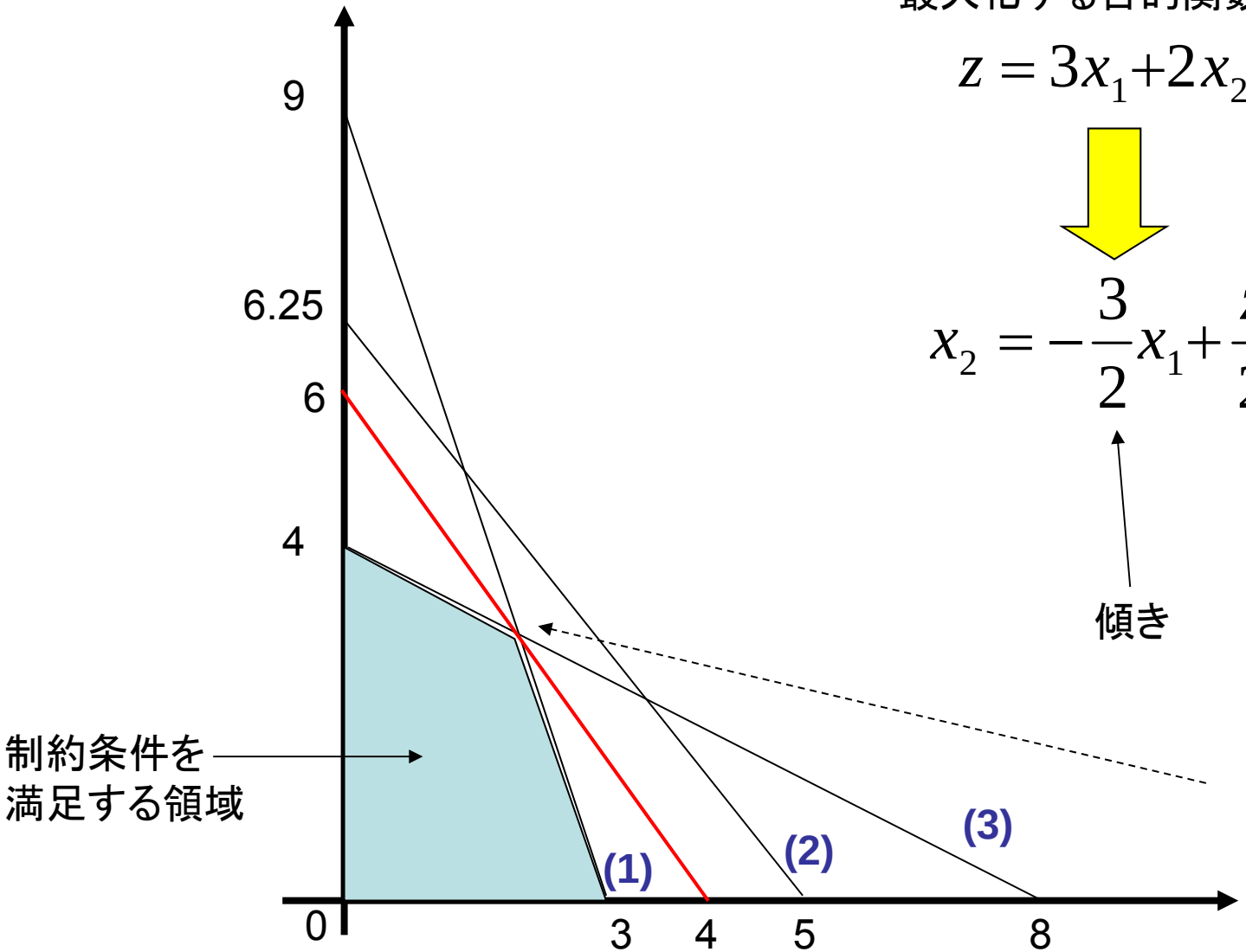
$$z = 3x_1 + 2x_2$$

最大化する目的関数:

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{z}{2}$$

傾き　　Y切片



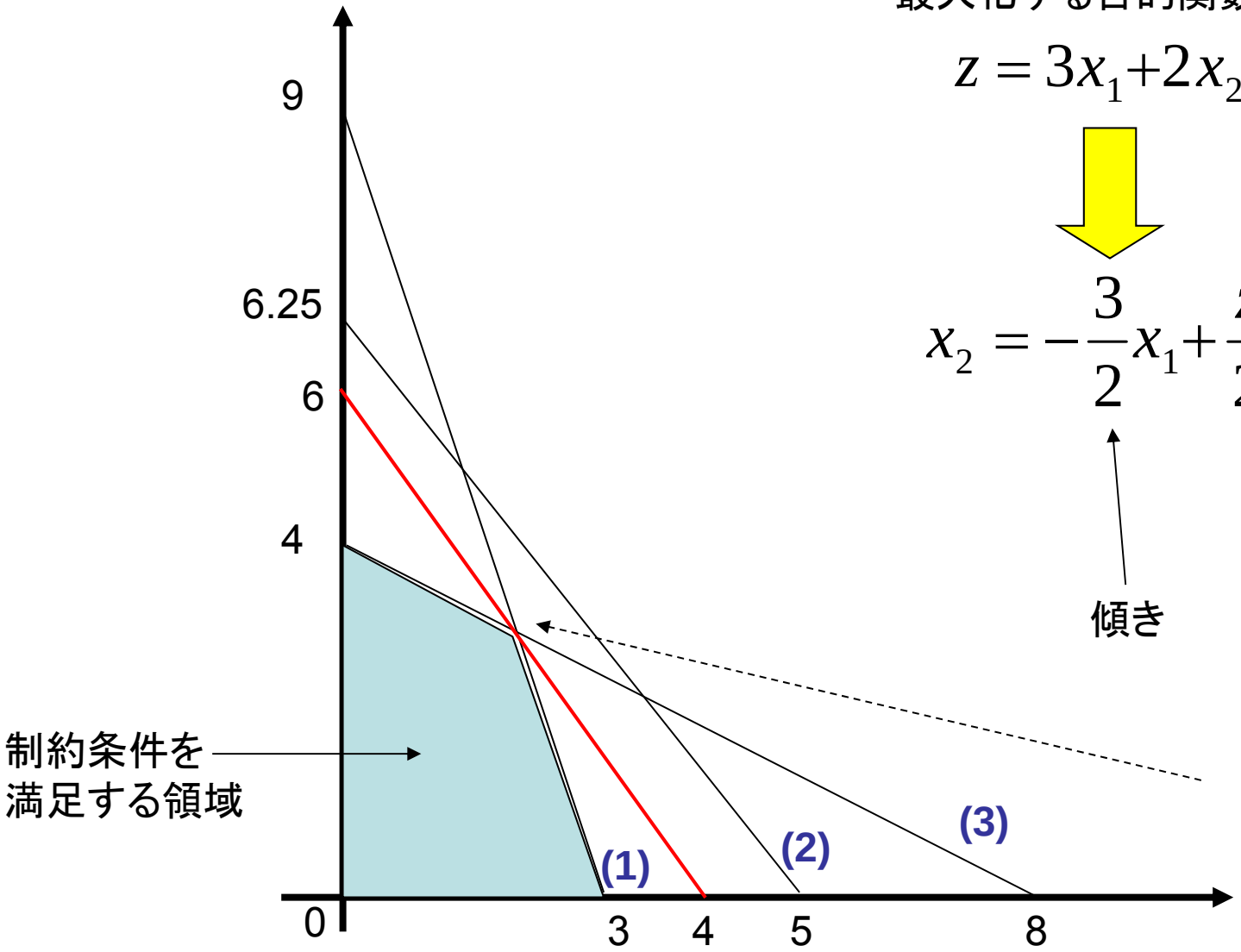
制約条件を満足する領域を通り、Y切片が最大になる直線は
Z=12
このとき
X1=2, X2=3

最大化する目的関数:

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{z}{2}$$

傾き　　Y切片



制約条件を満足する領域を通り、Y切片が最大になる直線は
Z=12
このとき
X1=2, X2=3

線形計画問題では、制約条件を構成する**超平面同士の交点のどこかの頂点**に解が存在する

線形計画問題の例2　輸送問題 （長尾智晴著「最適化アルゴリズム」より引用）

5箇所の倉庫（1 ≦i ≦5 ）に保管してある製品を10箇所の営業所 （1 ≦ j ≦10）に輸送する。

倉庫 i から営業所 j に製品を輸送する単位製品あたりのコストは c_{ij} で与えられる。

倉庫 i の在庫を a_i 営業所 j からの注文量を b_j

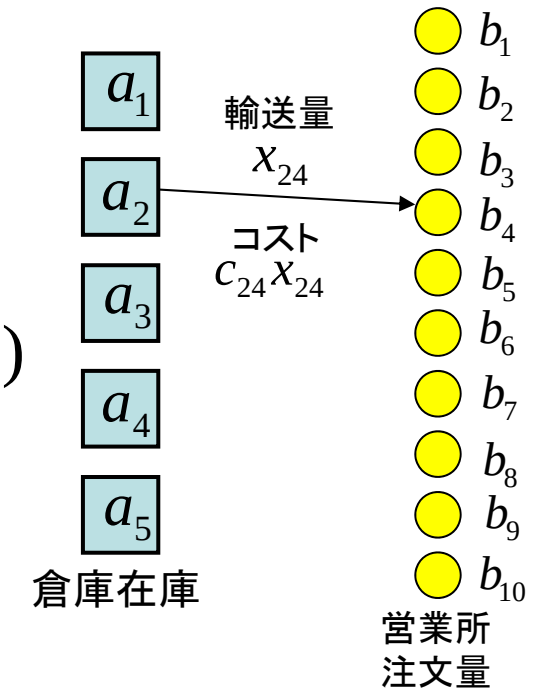
倉庫 i から営業所 j へ輸送する製品の量を x_{ij} とする。（変数）

このとき輸送のための全体コストを最小にするような輸送量の割当 x_{ij} を求めよ。（変数）

制約条件：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{10} x_{ij} \le a_i & (i=1,2,3,4,5) \\ \sum_{i=1}^{5} x_{ij} = b_j & (j=1,2,\cdots,10) \\ x_{ij} \ge 0 & (i=1,\cdots,5,\ j=1,\cdots,10) \end{cases}$$

目的関数：
（最大化する）　$z = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij}$



線形計画問題の解法：線形計画法（Linear Programming: LP）

線形計画問題の [　　]

以下の条件のもとでzを最大にするxを求める：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & = b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & + x_{n+m} & = b_m \\ -c_1x_1 - \cdots - c_nx_n & + z & = c_0 \end{cases}$$

ただし $\begin{cases} x_1, \cdots, x_{m+n} \geq 0 \\ b_1, \cdots, b_m \geq 0 \end{cases}$

正準形でない線形計画問題はいくつかの操作により正準形に直せる

・条件不等式を等式に直す：　$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$　を

スラック変数と呼ばれる新たな変数　$x'_i \equiv b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$　を導入して

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x'_i = b_i, \quad x'_i \geq 0$ と書き換える。不等号が逆の場合も同様。

線形計画問題の解法：線形計画法（Linear Programming: LP）

線形計画問題の　正準形（canonical form）

以下の条件のもとでzを最大にするxを求める：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ -c_1x_1 - \cdots - c_nx_n + z = c_0 \end{cases}$$

ただし $\begin{cases} x_1, \cdots, x_{m+n} \geq 0 \\ b_1, \cdots, b_m \geq 0 \end{cases}$

正準形でない線形計画問題はいくつかの操作により正準形に直せる

・条件不等式を等式に直す：　$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$　を

スラック変数と呼ばれる新たな変数　$x'_i \equiv b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$　を導入して

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x'_i = b_i, \quad x'_i \geq 0$ と書き換える。不等号が逆の場合も同様。

線形計画問題の解法：線形計画法（LP）

【注】非線形最適化法の
「滑降シンプレックス法」とは別物！

小規模問題ならエクセル
大規模問題では
専用ソフトを利用せよ

正準形線形計画問題の解法：　シンプレックス法

シンプレックス法の処理手順の概要：

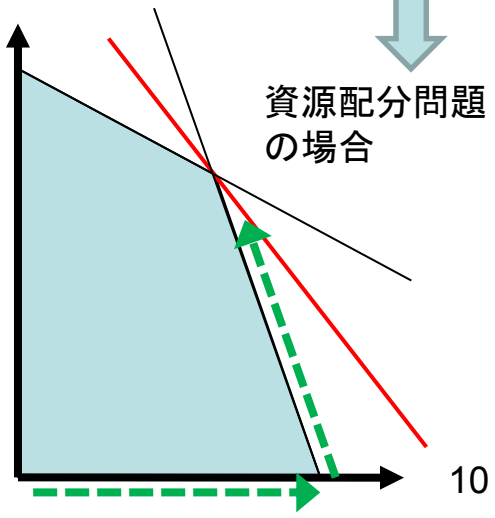
1）　可能解の一つである**基底解**からスタートする

2）　可能解を逐次改善していく
　　その際に、超平面の交線に沿って効率良く改善（詳細は省略）

$x_1 = 0, \cdots, x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1, \cdots, x_{m+n} = b_m,\ z = c_0$ ← 自明な解

全て0

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & = b_1 \\
\quad\vdots & \ddots & \quad\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & + x_{n+m} & = b_m \\
-c_1x_1 - \cdots - c_nx_n & & + z = c_0
\end{cases}
$$



【制約つき関数最適化】 ここまでのまとめ

線形計画問題とは？

線形等式制約
線形不等式制約 のもとでの **線形目的関数**の最大化／最小化

【特徴】 式の超平面同士の交点のどこかに最適解が存在
【解法】 実行可能解を改善していく＝**線形計画法（LP）** シンプレックス法

小規模問題ならエクセル
大規模問題では
専用ソフトを利用せよ

非線形計画問題とは？

制約や目的関数が線形ではない場合全て

【制約条件が等式の場合】

【制約条件に等式と不等式が混在する場合】

【制約つき関数最適化】 ここまでのまとめ

線形計画問題とは？

線形等式制約
線形不等式制約　のもとでの　線形目的関数の最大化／最小化

【特徴】 式の超平面同士の交点のどこかに最適解が存在
【解法】 実行可能解を改善していく＝線形計画法（LP） シンプレックス法

小規模問題ならエクセル
大規模問題では
専用ソフトを利用せよ

非線形計画問題とは？　　制約や目的関数が線形ではない場合全て

【制約条件が等式の場合】

【制約条件に等式と不等式が混在する場合】

【制約つき関数最適化】

非線形計画問題
非線形計画法（nonlinear programming）

目的関数　$f(\mathbf{x})$　ただし　$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots x_n]$

を制約条件　$h_i(\mathbf{x}) = 0$　ただし　$i = 1, 2, \cdots m$　（等式制約条件）

のもとで最小化する問題。

等式制約条件だけの場合：まず　　を試みよ

ラグランジュ関数　$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\mathbf{x})$　を導入する。

$f(\mathbf{x})$：目的関数　　$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\mathbf{x})$：等式制約条件

この関数が　$\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$　において局所的最小点となるための必要条件が

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \dfrac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \dfrac{\partial}{\partial x_j} h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda_j} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \end{cases}$$

であることを利用し、この連立方程式を解いて
最小点　$\mathbf{x}^*$　を求める

【制約つき関数最適化】

非線形計画問題
非線形計画法（nonlinear programming）

目的関数　$f(\mathbf{x})$　ただし　$\mathbf{x}=[x_1, x_2, \cdots x_n]$

を制約条件　$h_i(\mathbf{x})=0$　ただし　$i=1,2,\cdots m$　（等式制約条件）

のもとで最小化する問題。

等式制約条件だけの場合：まず **ラグランジュの未定乗数法** を試みよ

ラグランジュ関数　$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i h_i(\mathbf{x})$　を導入する。

$f(\mathbf{x})$：目的関数　　$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i h_i(\mathbf{x})$：等式制約条件

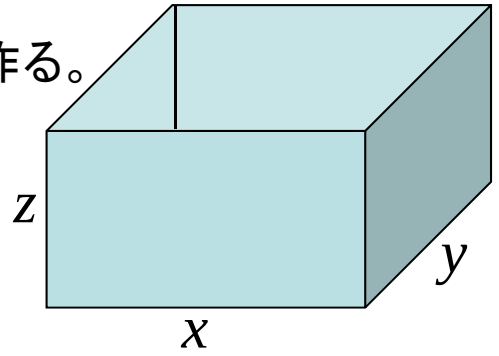
この関数が　$\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$　において局所的最小点となるための必要条件が

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j} L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)=\dfrac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{x}^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\dfrac{\partial}{\partial x_j} h_i(\mathbf{x}^*)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda_j} L(\mathbf{x}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)=h_i(\mathbf{x}^*)=0 \end{cases}$$

であることを利用し、この連立方程式を解いて
最小点　$\mathbf{x}^*$　を求める

【等式条件下での最大化問題の例】

2辺の長さが x, y の長方形を底辺とする高さ z のフタの無い容器を作る。
この容器の表面積 $xy+2(xz+yz)=a$ を一定のもとで、
体積 $V=xyz$ を最大にするには、x, y, z を
どのような比率にしたら良いか？



目的関数 $f(x,y,z)=xyz$

等式制約条件 $h_1(x,y,z)=xy+2(xz+yz)-a=0$

このとき、ラグランジュ関数は
定数 λ_1 を使って右式で表される:

$$L(x,y,z,\lambda_1)=\square+\lambda_1\square$$

$f(x,y,z)$ 目的関数

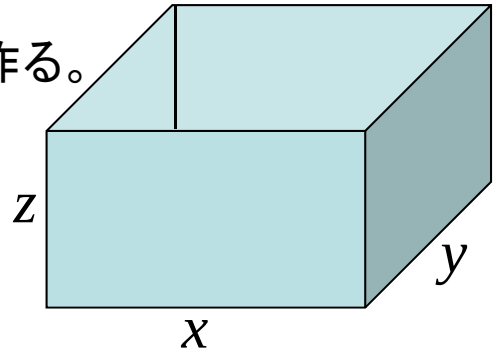
$h_1(x,y,z)$ 等式制約条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}L(x,y,z,\lambda_1)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial y}L(x,y,z,\lambda_1)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial z}L(x,y,z,\lambda_1)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda_1}L(x,y,z,\lambda_1)=0\end{cases}$$

この連立方程式を解くと

【等式条件下での最大化問題の例】

2辺の長さが x, y の長方形を底辺とする高さ z のフタの無い容器を作る。
この容器の表面積 $xy+2(xz+yz)=a$ を一定のもとで、
体積 $V=xyz$ を最大にするには、x, y, z を
どのような比率にしたら良いか？



目的関数 $f(x,y,z)=xyz$

等式制約条件 $h_1(x,y,z)=xy+2(xz+yz)-a=0$

このとき、ラグランジュ関数は
定数 λ_1 を使って右式で表される:

$$L(x,y,z,\lambda_1)=xyz+\lambda_1\left(xy+2(xz+yz)-a\right)$$

$f(x,y,z)$ 目的関数　　$h_1(x,y,z)$ 等式制約条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}L(x,y,z,\lambda_1)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial y}L(x,y,z,\lambda_1)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial z}L(x,y,z,\lambda_1)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda_1}L(x,y,z,\lambda_1)=0\end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$$\lambda_1=\frac{xy}{2(x+y)} \qquad x=y \qquad z=\frac{x}{2}$$

よって　x:y:z　＝　2:2:1

【制約つき関数最適化】

非線形最適化問題
非線形計画法（nonlinear programming）

目的関数　$f(\mathbf{x})$　ただし　$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots x_n]$

を制約条件　$h_i(\mathbf{x}) = 0$　ただし　$i = 1, 2, \cdots m$　（等式制約条件）

$g_j(\mathbf{x}) \geq 0$　ただし　$j = 1, 2, \cdots \ell$　（不等式制約条件）

のもとで最小化する問題。

不等式制約条件の扱い：

ペナルティ関数　$p(\mathbf{x})$　を導入し、目的関数を　$f(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x})$　に変換して、

制約のない関数最適化問題として解く

ペナルティ関数の例：

$$p(\mathbf{x}) = \alpha_t \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{g_j(\mathbf{x})} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_t}} \sum_{i=1}^{m} h_i{}^2(\mathbf{x})$$

不等式制約を
満たさない場合、
P(x)＝∞

不等式制約を
破りそうになると大きくなる

等式制約を
満たせば最小

ただし α_t　は最初大きな値に設定し、探索とともに小さな値にしていく

【制約つき関数最適化】

非線形最適化問題
非線形計画法（nonlinear programming）

目的関数　$f(\mathbf{x})$　ただし　$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots x_n]$

を制約条件　$h_i(\mathbf{x}) = 0$　ただし　$i = 1, 2, \cdots m$　（等式制約条件）

$g_j(\mathbf{x}) \geq 0$　ただし　$j = 1, 2, \cdots \ell$　（不等式制約条件）

のもとで最小化する問題。

不等式制約条件の扱い：ペナルティ関数法

ペナルティ関数　$p(\mathbf{x})$　を導入し、目的関数を　$f(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x})$　に変換して、

制約のない関数最適化問題として解く

ペナルティ関数の例：

$$p(\mathbf{x}) = \alpha_t \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{g_j(\mathbf{x})} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_t}} \sum_{i=1}^{m} h_i^{\,2}(\mathbf{x})$$

不等式制約を
満たさない場合、
P(x)＝∞

不等式制約を
破りそうになると大きくなる

バリア関数

等式制約を
満たせば最小

ただし α_t　は最初大きな値に設定し、探索とともに小さな値にしていく

【制約つき関数最適化】まとめ

線形計画問題とは？

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \ge 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

線形等式制約
線形不等式制約

という制約のもとで、

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

線形目的関数

を最大化（あるいは最小化）する　$x_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$　を求める問題。

【特徴】 式の超平面同士の交点のどこかに最適解が存在

【解法】 実行可能解を改善していく＝**線形計画法（LP）**シンプレックス法

小規模問題ならエクセル
大規模問題では専用ソフトを利用せよ

非線形計画問題とは？

制約や目的関数が線形ではない場合全て

【制約条件が等式の場合】**ラグランジュの未定乗数法**を試みよ

【制約条件に等式と不等式が混在する場合】
目的関数＋**ペナルティ関数**　を「制約のない数値最適化法」で最小化せよ

【演習問題】

2018.12.21

	加工機A	加工機B	加工機C
製品X1（3万円）	4h	2h	1h
製品X2（2万円）	1h	2h	3h
1週間あたりの稼動時間	72h	48h	48h

学籍番号
氏　名 _____

右図のように3台の加工機械を保有している工場が製品X1およびX2を生産する。1週間あたりの稼働時間の制限範囲内で利益を最大にするには、それぞれの製品X1、X2をどれだけ作るべきか計算せよ。

【演習問題】

	加工機A	加工機B	加工機C
製品X1（3万円）	4h	2h	1h
製品X2（2万円）	1h	2h	3h
1週間あたりの稼動時間	72h	48h	48h

学籍番号
氏　名

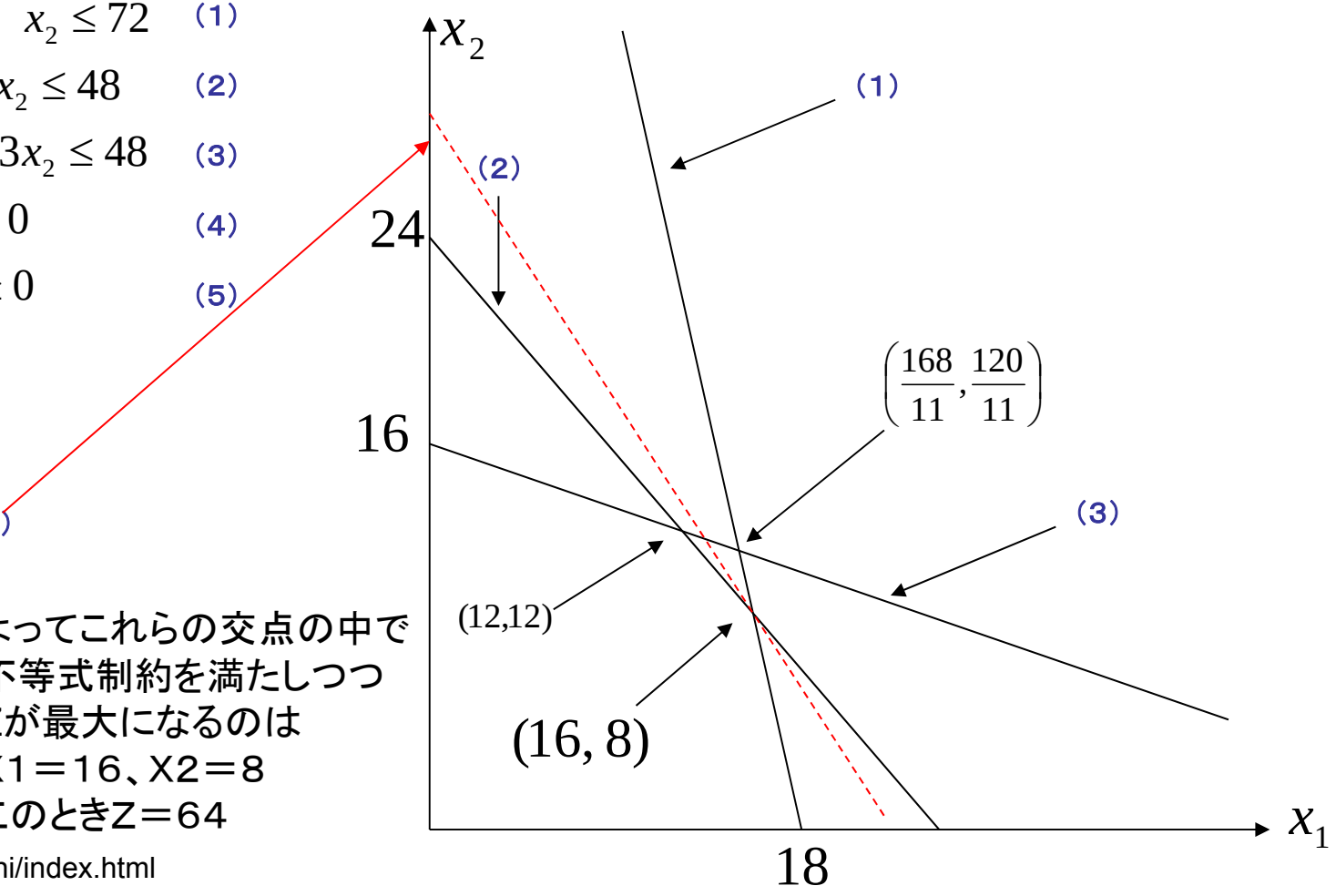
右図のように3台の加工機械を保有している工場が製品X1およびX2を生産する。1週間あたりの稼働時間の制限範囲内で利益を最大にするには、それぞれの製品X1、X2をどれだけ作るべきか計算せよ。

制約条件：

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 72 & (1) \\ 2x_1 + 2x_2 \le 48 & (2) \\ x_1 + 3x_2 \le 48 & (3) \\ x_1 \ge 0 & (4) \\ x_2 \ge 0 & (5) \end{cases}$$

目的関数：
（最大化する）

$$z = 3x_1 + 2x_2 \quad (6)$$



よってこれらの交点の中で
不等式制約を満たしつつ
Zが最大になるのは
X1＝16、X2＝8
このときZ＝64

参考文献：
木暮　仁 氏のサイト
http://www.kogures.com/hitoshi/index.html