平成27年度システム設計工学 定期試験問題

問題1

以下のデータはある造船所で建造されたタンカーの主要目とその工事に伴う溶接長と塗料量の実績である。

船の番号	L	B	D	C_b	延べ溶接長	塗料合計
No.1	168	32.2	17.0	0.80	11.3	320
No.2	192	32.2	15.2	0.79	12.4	350
No.3	116	20.0	13.7	0.78	3.32	89.7
No.4	175	23.1	15.2	0.82	11.7	332
No.5	137	23.1	14.5	0.78	8.72	247
No.6	172	32.2	18.1	0.80	12.3	349
No.7	97	15.5	10.5	0.78	2.1	51.2
No.8（工事予定）	160	23.1	15.0	0.79	?	?

このとき以下の問いに答えよ。

【問1–1】(10点)
上記の表で工事予定のNo.8における「延べ溶接長」と「塗料合計」を推定したい。上記の表のデータをどのように利用して計算したら良いか?上記データの数字を用いて式を作り、計算手順を説明せよ。

【問1–2】(5点)
問1–1の推定をより精度良く行うため、以下のような4通りの工夫を検討した。
このとき、明らかに推定計算上不都合が生じると考えられるものを全て挙げ、その理由を説明せよ。ただし単なる計算量の増加は、計算上の不都合とは考えないものとする。

1. 新しく番号No.9についてのデータをテーブルに追加し、問1–1と同様の推定方法で計算をやり直す。このとき、このNo.9はNo.6と同型船であるため、L, B, D, C_b の値はNo.6と完全に同一であるが、延べ溶接長と塗料合計は若干異なっている。
2. 各船の特徴量として L, B, D, C_b に加えて、船殻の体積を反映する新しい特徴量 $x_5 = L{\cdot}B{\cdot}D{\cdot}C_b$ を導入し、問1–1と同様の推定方法で計算をやり直す。
3. 各船の特徴量として L, B, D, C_b に加えて、船殻の長さを反映する新しい特徴量 $x_5 = L+B+D$ を導入し、問1–1と同様の推定方法で計算をやり直す。
4. 上記の特徴量のうち、C_b の値はどの船もほとんど変わらないので、特徴量から除外し、問1－1と同様の推定方法で計算をやり直す。

問題2

【問２–１】ドロネー分割とは何か説明せよ。（5 点）

【問２–２】2 次元平面におけるドロネー図の生成方法の概略を述べよ。（5 点）

問題3

ある製品 x および y を生産するためには原料 A, B, C を要する。各製品 1 単位分を生産するのに必要な各原料の量とその在庫量、および製品 1 単位あたりの利益は以下の表のとおり：

	製品 x	製品 y	在庫量
原料 A	5	2	20
原料 B	1	2	12
原料 C	1	1	10
製品 1 単位あたりの利益	3	3	—

原料の在庫が許す範囲内で利益が最大になるように製品 x と y の生産量を決める。このとき以下の問いに答えよ。

【問３–１】上記の表より製品 x と y の制約条件および目的関数を式で示せ。
またこのような式で表される問題は何と呼ばれるか答えよ。（5 点）

【問３–２】原料の在庫が許す範囲内で利益が最大になる製品 x と y の生産量を求めよ。（5 点）

問題4

パラメータベクトル $\boldsymbol{x}$ の値を探索してコスト関数 $f(\boldsymbol{x})$ の最小化を行うための共役勾配法について、以下の説明を読んで問に答えよ：

- i 番目の方向転換をする点の座標ベクトル： $\boldsymbol{x_i}$
- 点 x_i における勾配ベクトル： $\boldsymbol{g_i}$
- 点 x_i からラインサーチを行う方向ベクトル： $\boldsymbol{p_i}$

以上の記法を用いると、共役勾配法の手順は以下のとおりである：

1. まず最初に勾配の反対方向へラインサーチを行う：$\boldsymbol{p_0} = -\boldsymbol{g_0}$
2. $\boldsymbol{x}_i$ の次の点 $\boldsymbol{x_{i+1}}$ をラインサーチで見つけた最小点とする：$\boldsymbol{x_{i+1}} = \boldsymbol{x}_i + \alpha_i \boldsymbol{p_i}$, ただし α_i は係数である。

3. 次の点 $\boldsymbol{x}_{i+1}$ での新しい探索方向 $\boldsymbol{p}_{i+1}$ は、前の探索方向 $\boldsymbol{p}_i$ と共役であるようにする。そのため、点 $\boldsymbol{x}_{i+1}$ での勾配と前の探索方向 $\boldsymbol{p}_i$ とを結合する：$\boldsymbol{p}_{i+1} = -\boldsymbol{g}_i + \beta_{i+1}\boldsymbol{p}_i$, ただし β_{i+1} は重み係数である。
4. x_{i+1} を x_i としてステップ 2 より繰り返す

【問４−１】（5 点）重み係数 β_{i+1} はどんな式で与えられるか？勾配 $\boldsymbol{g}_i$ 及び $\boldsymbol{g}_{i+1}$ を用いて示せ。

【問４−２】（5 点）ラインサーチについて説明せよ。また代表的なラインサーチを挙げよ。

問題5

組合せ最適化および数値最適化問題の両方においてパラメータベクトル $\boldsymbol{x}$ の値を探索してコスト関数 $f(\boldsymbol{x})$ の最小化を行うための焼きなまし法（Simulated Annealing: SA）の処理手順について説明した以下の文を読んで問いに答えよ：

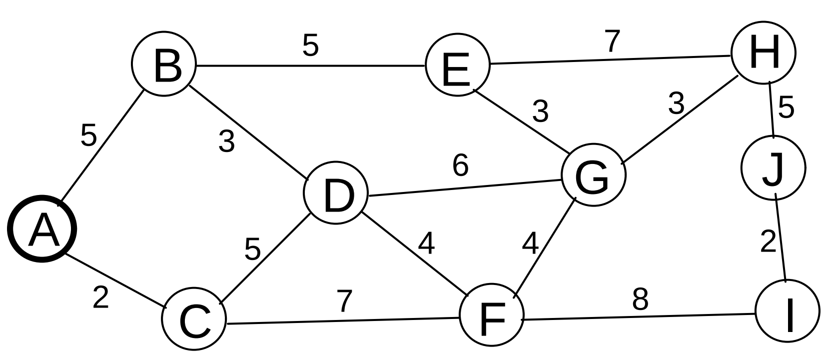
1. 初期解候補 $\boldsymbol{x}$ を生成
2. 何らかの確率分布によって解候補 $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}'$ を生成（ランダムに $\boldsymbol{x}$ の近傍を選ぶことが多い）
3. 温度関数 $T(t)$ およびコスト関数 $f(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{x}')$ に依存したある確率分布に従って 0 または 1 の値をとる確率変数（乱数）Z を生成する。ただし t は時刻（探索ステップ）を表す。
4. $Z = 1$ のとき $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}'$ に置き換える。
5. 時刻 t を 1 進めてステップ 2 から繰り返す

【問５−１】（5 点）上記の処理において、確率変数（乱数）$Z = 1$ をとる確率を、温度関数 $T(t)$ およびコスト関数 $f(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{x}')$ を用いて示せ。

【問５−２】（5 点）上記の処理において、温度関数 $T(t)$ をどのような関数で与えたら良いか答えよ。

問題6

（10 点）以下のグラフはAからＪの各ノード間で移動が可能な場合のコストを表す。Aから各ノードへ最小コストで移動する場合の <u>Aからの総コスト</u> および <u>経路</u> をダイクストラ法で計算し、計算過程を解答用紙上の図へ記入せよ。経路は矢印で示せ。



問題７

貨物を各フロアへ運ぶリフトについて考える。リフトが設置されている建物は大きく上層階と下層階に分けられ、それぞれの階層では運ぶ荷物の種類が異なるため、各階層あるいは階層間でリフトが移動するための平均コストが異なっている。調査の結果、リフトは建物内を以下の確率に従って動いていることが分かった。

- リフトが上層階にいる場合、確率 $\frac{1}{3}$ で上層階へ移動し、確率 $\frac{2}{3}$ で下層階へ移動する。
- リフトが低層階にいる場合、確率 $\frac{1}{4}$ で下層階へ移動し、確率 $\frac{3}{4}$ で上層階へ移動する。
- リフトが上層階から上層階の別のフロアへ移動する場合の平均コストは 30 円、リフトが上層階から下層階へ移動する場合の平均コストは 90 円である。
- リフトが下層階から下層階の別のフロアへ移動する場合の平均コストは 40 円、リフトが下層階から上層階へ移動する場合の平均コストは 80 円である。

リフトが下層階にいる状態を s_1、上層階にいる状態を s_2 として以下の問いに答えよ。

【問７–１】定常分布を計算せよ。導出過程も示せ。（10 点）

【問７–２】平均コストを計算せよ。導出過程も示せ。（10 点）

問題８

ある酔っ払いが、左側が塀、右側がドブの、せまい道路を以下のようにフラフラ歩いている。

- 道路の左側にいる場合、次のステップにおいて、道路の左側にとどまる確率は $\frac{2}{3}$、道路の右側へ移動する確率は $\frac{1}{3}$ である
- 道路の右側にいる場合、次のステップにおいて、道路の左側に移動する確率は $\frac{1}{3}$、また道路の右側にとどまる確率は $\frac{1}{3}$、ドブへ落ちる確率は $\frac{1}{3}$ である
- 酔っ払いがドブに落ちると、そこから動けないものとする
- 酔っ払いが道路の左側にいる状態を s_1、道路の右側にいる状態を s_2、ドブに落ちている状態を s_3 とする。

このとき以下の問に答えよ。

【問８–１】状態 s_3 を吸収状態（終了状態）として酔っ払いの動きをマルコフ過程でモデル化し、状態遷移行列を示せ。（5 点）

【問８–２】道路の左側にいる酔っ払いがドブに落ちるまでの平均ステップ数を計算せよ。（10 点）

平成 27 年度システム設計工学定期試験　解答

問題１

【問１–１】（10 点）各船の特徴量 $L,\ B,\ D,\ C_b$ を以下の変数（説明変数）x_1, x_2, x_3, x_4 で表し、延べ溶接長 y を以下の多重回帰によって説明する：

$$y \ = \ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + e$$

ただし b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 は回帰係数、e は確率変動（誤差）である。
ここで、表のデータを用いて、回帰係数 $b_0, b_1, \cdots, b_4$ を求める。行と列を間違えないよう注意しながら表のデータを行列に変換すると、以下のようになる：

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 11.3 \\ 12.4 \\ 3.32 \\ 11.7 \\ 8.72 \\ 12.3 \\ 2.1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 168 & 32.2 & 17.0 & 0.80 \\ 1 & 192 & 32.2 & 15.2 & 0.79 \\ 1 & 116 & 20.0 & 13.7 & 0.78 \\ 1 & 175 & 23.1 & 15.2 & 0.82 \\ 1 & 137 & 23.1 & 14.5 & 0.78 \\ 1 & 172 & 32.2 & 18.1 & 0.80 \\ 1 & 97 & 15.5 & 10.5 & 0.78 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{bmatrix}$$

と表す。ここで、

(1) 行列 $\boldsymbol{X}$ の最初の列の要素は 1 とする

(2) 行列 $\boldsymbol{X}$ には推定しようとする船（ここでは No.8）のデータを含めない

以上の点に注意する。このとき $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{e}$ とした場合の誤差ベクトル $\boldsymbol{e}$ の平方和を最小にする回帰係数 $\hat{\boldsymbol{b}}$ は以下の式で与えられる：

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \left(\boldsymbol{X}^{Trans}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{Trans}\boldsymbol{y}$$

工事予定船 No.8 の要目 $L,\ B,\ D,\ C_b$ を $x_1 = 160, x_2 = 23.1, x_3 = 15.0, x_4 = 0.79$ へ代入し、上で求めた回帰係数 $\hat{\boldsymbol{b}}$ を使って $y \ = \ \hat{b_0} + \hat{b_1}x_1 + \hat{b_2}x_2 + \hat{b_3}x_3 + \hat{b_4}x_4$ より工事予定船 No.8 の延べ溶接長の推定値 y を得る。この推定の式では誤差 e の項は除外すること。

また、塗料合計については上記の行列のうち $\boldsymbol{y}$ だけを以下のように

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 320 \\ 350 \\ 89.7 \\ 332 \\ 247 \\ 349 \\ 51.2 \end{bmatrix}$$

として同様の計算により推定する。

【問1–2】（5 点）説明変数 $x_1, x_2, \cdots x_k$ について、任意の定数 $a_0, a_1, \cdots a_k$ を用いて関係式 $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_k x_k = 0$ に近い関係が成り立つとき、データは強い多重共線関係（多重共線性）がある。このとき回帰係数ベクトルを求める逆行列計算が不安定になり、無意味な解が出やすい。

ここで、問題文のうち、明らかに 3 番目の方法は上記の関係式を生み出してしまい、回帰係数ベクトルを求める逆行列計算ができないという不都合が生じる。

多重回帰は最小 2 乗法であり、データの重複は問題ないので、1 番目の方法は問題ない。
また 2 番目の方法は、新しい説明変数を既存の説明変数から生成しているが、非線形関数になっているので多重共線性は生じず、問題は無い。

問題2

【問2–1】（5 点）空間中に配置されている複数の点（母点）の、どの点に最も近いかによって空間を分割してできる図をボロノイ図（Voronoi graph）といい、その分割をボロノイ分割という。隣接するボロノイ領域の母点同士を繋いだ図をドロネー図（Delaunay graph）と呼び、この空間分割をドロネー（3 角形）分割という。

【問2–2】（5 点）ドロネー図の生成方法：全ての点の中から 3 点を選び、その外接円を描く。このとき、円内にその 3 点以外の点が含まれなければ、それらを 3 角形として結ぶ。この作業を全ての 3 点の組合せについて行ったとき、最終的に得られる 3 角形分割はドロネー分割になっている。

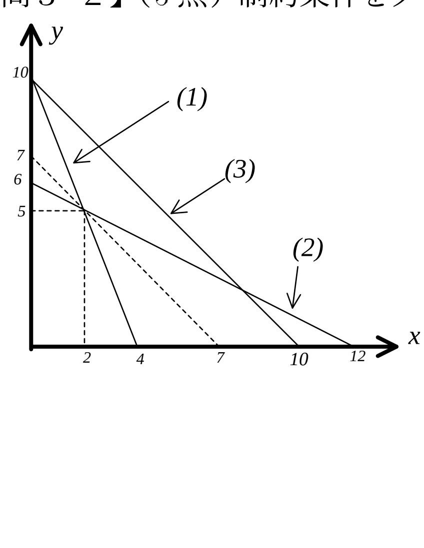
問題3

【問3–1】（5 点）制約条件

$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 20 & (1) \\ x + 2y \leq 12 & (2) \\ x + y \leq 10 & (3) \\ x \geq 0 & (4) \\ y \geq 0 & (5) \end{cases}$$

目的関数 $z = 3x + 3y$.　制約条件および目的関数が全て線形の場合、線形計画問題という。

【問3–2】（5 点）制約条件をグラフにすると以下のとおり



よって $x = 2, y = 5$ のとき $z = 3x + 3y = 21$ で利益最大となる。

問題 4

【問 4 – 1 】（5 点） Fletcher-Reeves 法：

$$\beta_{i+1} = \frac{\boldsymbol{g}_{i+1}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}_{i+1}}{\boldsymbol{g}_i^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}_i} = \frac{||\boldsymbol{g}_{i+1}||^2}{||\boldsymbol{g}_i||^2}$$

または Polak-Ribiere 法：

$$\beta_{i+1} = \frac{(\boldsymbol{g}_{i+1} - \boldsymbol{g}_i)^T\boldsymbol{g}_{i+1}}{\boldsymbol{g}_i^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}_i}$$

【問 4 – 2 】（5 点）ラインサーチとは、1 次元空間 x において関数 $f(x)$ の極小値または極大値となるパラメータ x の値を求めるアルゴリズムである。代表的ラインサーチとして黄金分割法や逆放物線補間などがある。

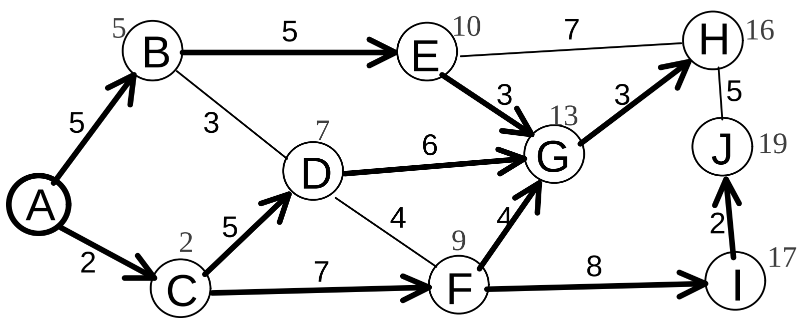
問題 5

【問 5 – 1 】（5 点）SA において、$Z - 1$ をとる確率＝ボルツマン分布

$$P(Z=1) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{f(x') - f(x)}{T(t)}\right)}$$

【問 5 – 2 】（5 点）$T(t) = \frac{k}{\log(t+2)}$ ただし k は任意の係数。しかしこれでは収束が極めて遅いので $T(t) = k/t$ とする場合もある。

問題 6



（10 点）解き方は第 7 回講義資料参照

問題 7

【問 7 – 1 解答】（10 点）定常分布は

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

この方程式に $\sigma_1+\sigma_2=1$ の条件を加えて解くと、

$$\sigma_1=\frac{8}{17}\,,\qquad \sigma_2=\frac{9}{17}$$

【問７–２解答】（10 点）状態 s_1 から１ステップ遷移する場合のコストの期待値は

$$\frac{1}{4}\cdot 40+\frac{3}{4}\cdot 80=70$$

状態 s_2 から１ステップ遷移する場合のコストの期待値は

$$\frac{1}{3}\cdot 30+\frac{2}{3}\cdot 90=70$$

よって平均コストは定常分布と各状態でのコストの期待値を用いて

$$\begin{bmatrix}\sigma_1 & \sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}70\\70\end{bmatrix}=70$$

問題８

【問８–１】（5 点）

$$P=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\tag{1}$$

【問８–２】（10 点）基本行列を M とすると、

$$M=(I-Q)^{-1}=\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}6 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}\tag{2}$$

よって吸収状態に陥るまでの平均ステップ数は

$$\begin{bmatrix}6 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\6\end{bmatrix}\tag{3}$$

状態 S_1 からスタートするので、この行列の上の要素だけに注目する。よって答えは 9 ステップ。

【参考文献】
［１］尾形わかば 著：　数理計画法　 オーム社（2010).

本試験問題および解答に疑問がある場合は，2 月 10 日（水）午後４時までに，
W２号館６階６３４号室の木村まで申し出ること。